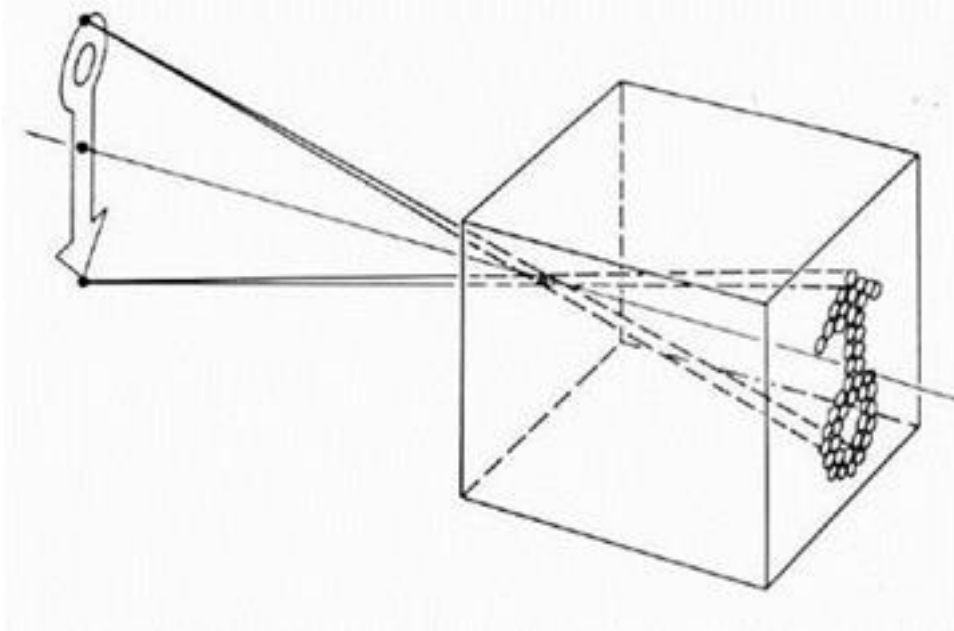


Опорный конспект по дисциплине «**Математические методы
распознавания образов**»

- Цифровой фотоаппарат
- Модель перспективной проекции
- Калибровка камеры
- Гомография
- Геометрия двух камер

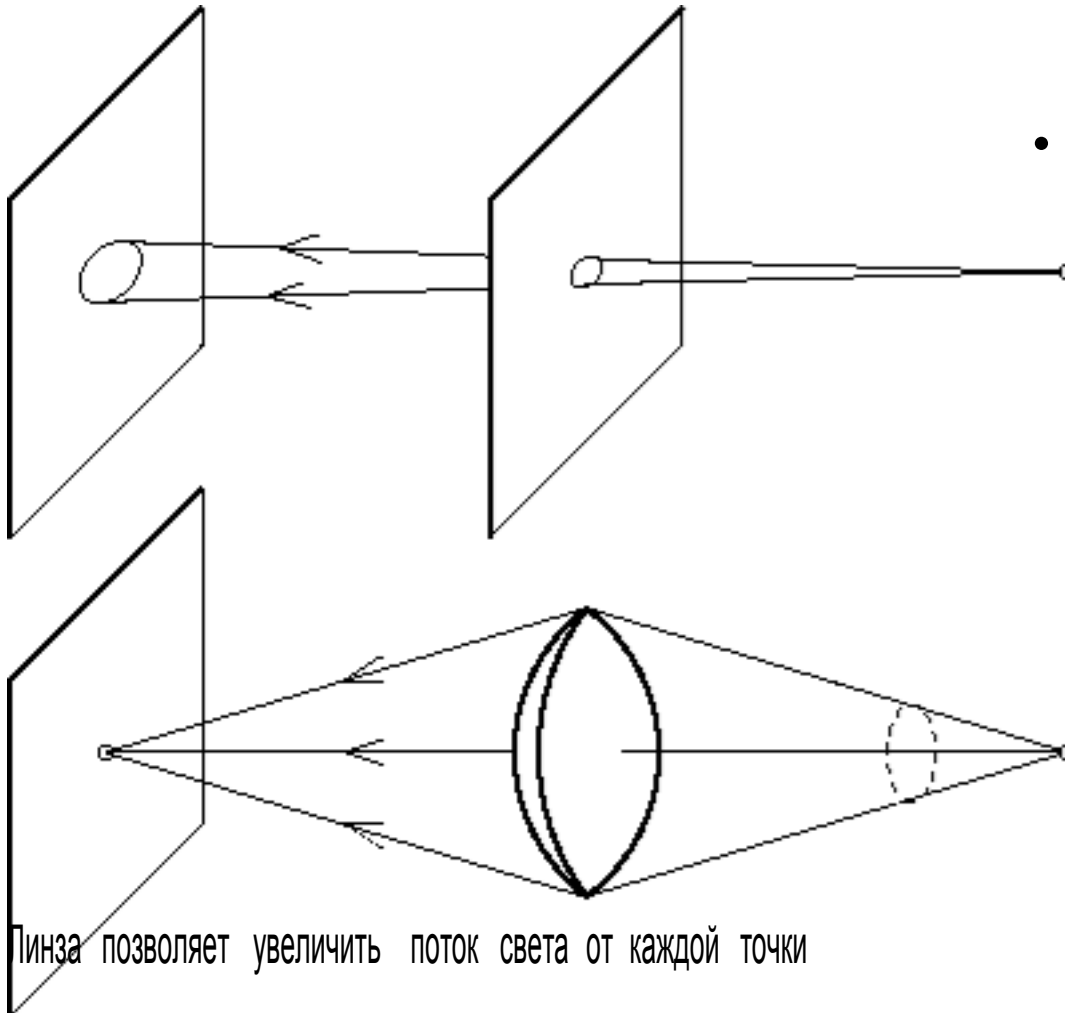
Модель камеры-обскуры



Модель:

- В преграде отверстие размеров в одну точку
- Все лучи проходят через одну точку
- Эта точка называется **Центром Проекции (ЦП)**
- Реальный размер отверстия – **Апертура**
- Изображение формируется на **Картинной плоскости**
- **Фокусным расстоянием f** называется расстояние от ЦП до Картинной плоскости

Линза!

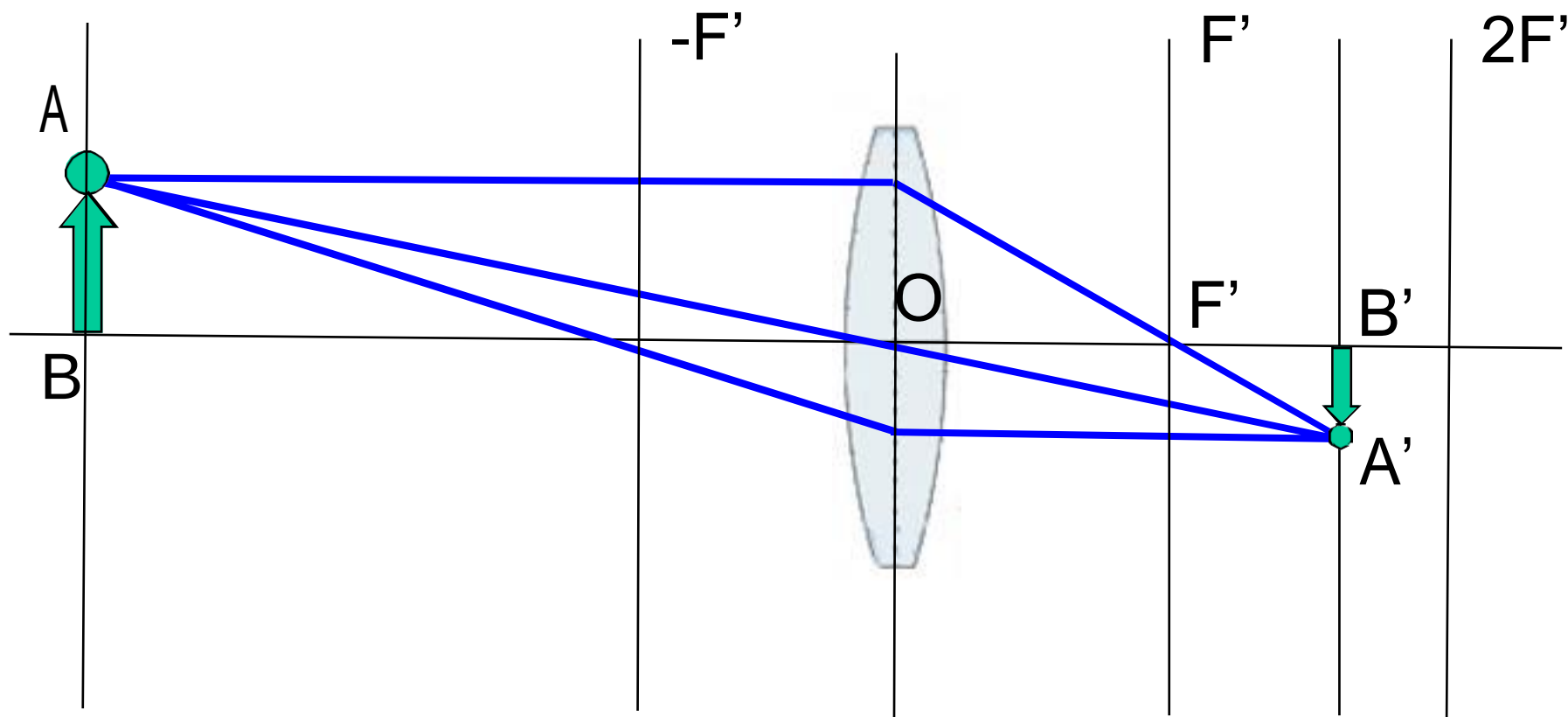


- Линза:

диск из прозрачного однородного материала, ограниченный двумя полированными сферическими, или плоской и сферической, поверхностями

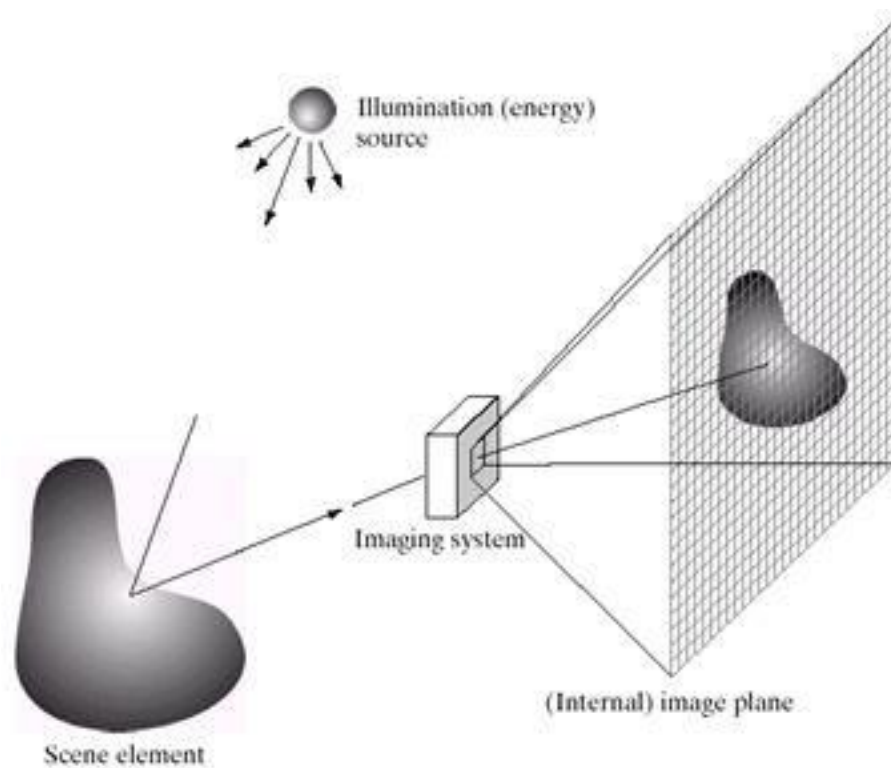
Линза позволяет увеличить поток света от каждой точки

Линза

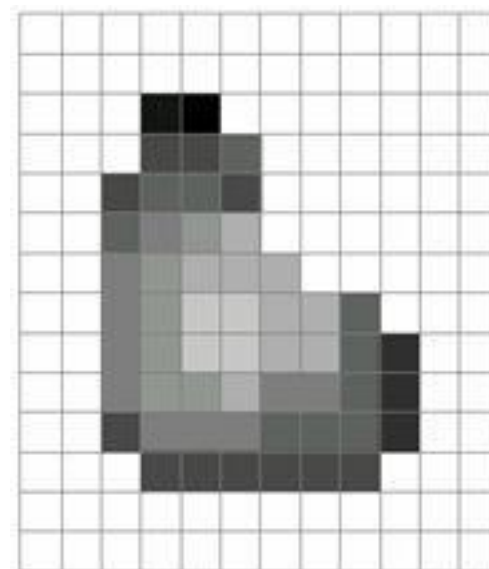
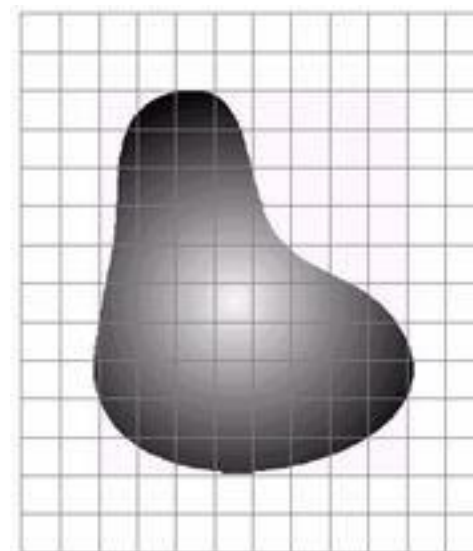


- Лучи от одной точки объекта, преломляясь линзой, фокусируются в одной точке позади линзы
- Луч, проходящий через центр линзы не преломляется
- Система точно как камера-обскура, но собирает больше света
 - O — центр проекции (центр линзы)

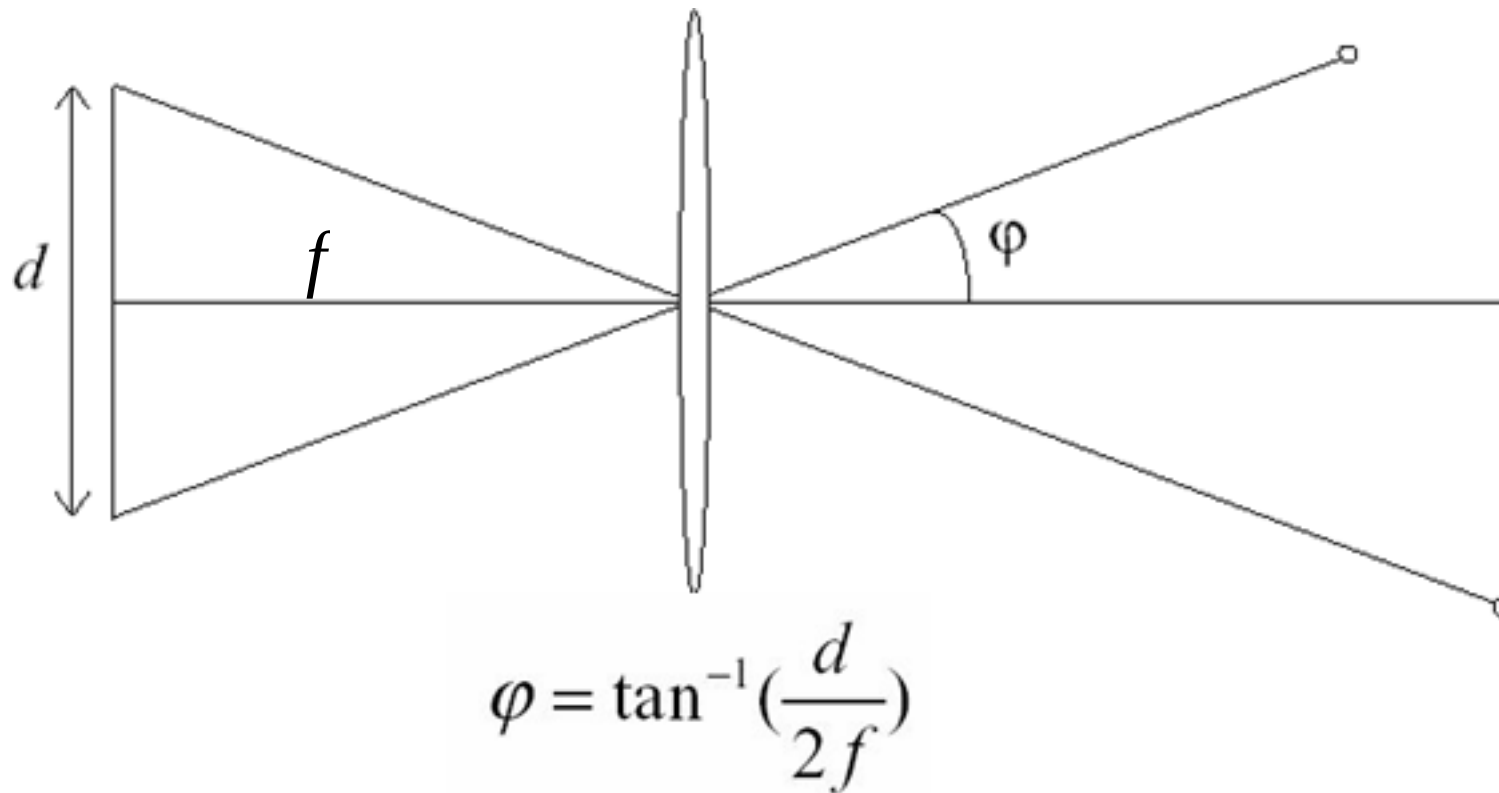
Пиксельное изображение



- Спроецированное изображение непрерывное, с гладкими границами
- На матрице оно дискретизируется
 - По пространству (пиксельная решетка)
 - По цвету



Угол обзора (Field of View)



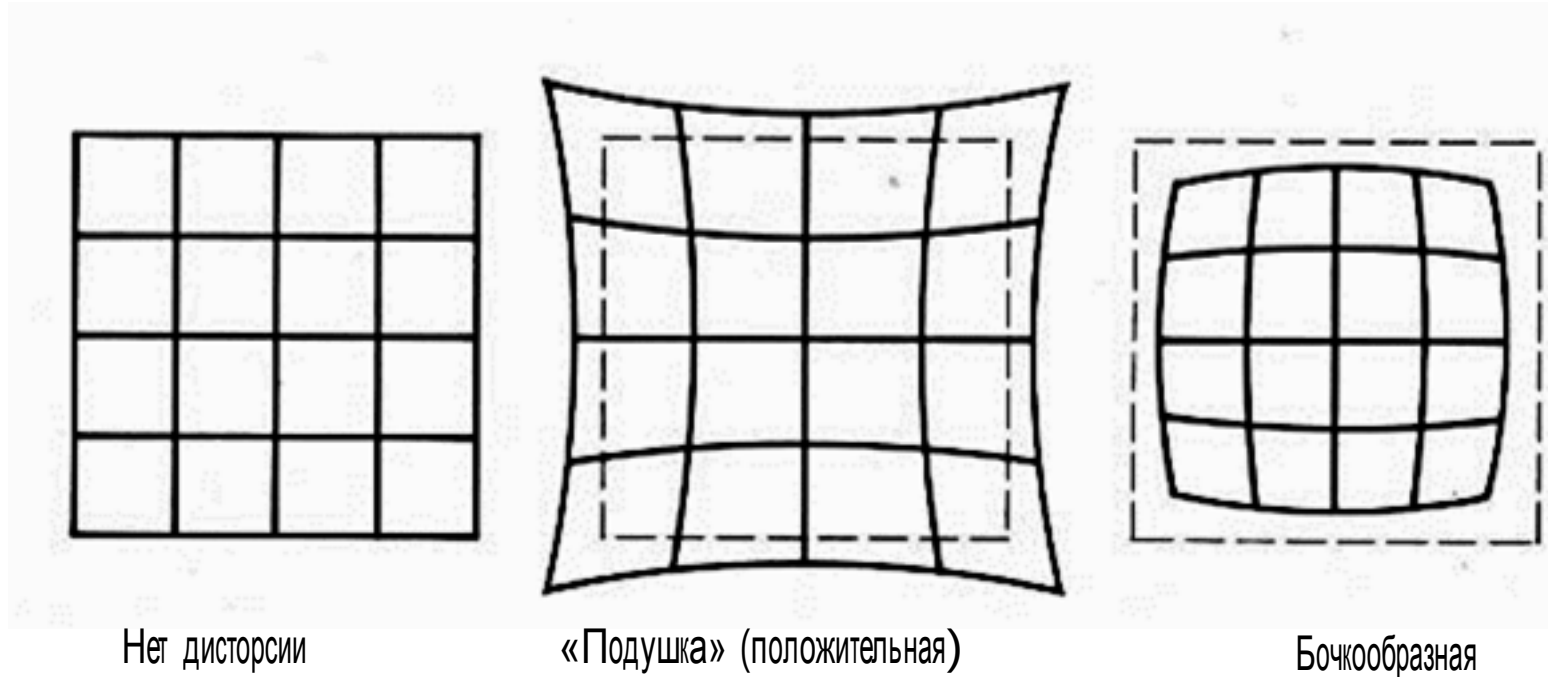
- Размер матрицы ограничен – ограничен угол обзора
- Больше фокусное расстояние – меньше угол обзора
- Меньше фокусное расстояние – больше угол обзора

Радиальная дисторсия



Прямые линии по краям изображения превращаются в кривые

Радиальная дисторсия

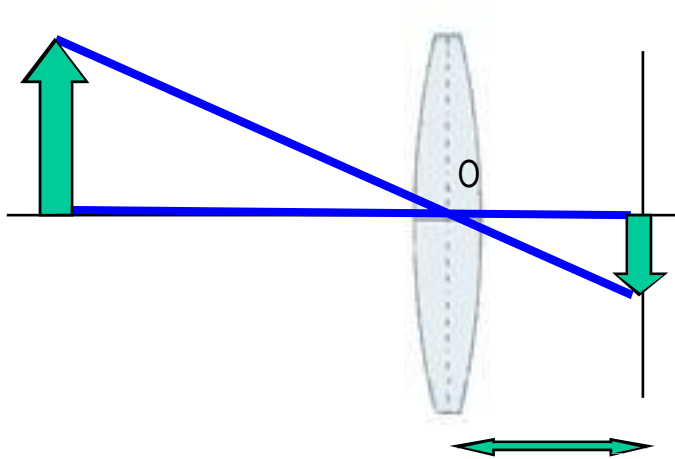


- Идеально тонких линз не бывает!
- Нарушается допущение $\sin(x) \sim x$
- Искажения наиболее заметны по краям изображения
- Приходится отдельно моделировать и устранять

План лекции

- Цифровой фотоаппарат
- Модель перспективной проекции
- Калибровка камеры
- Гомография
- Геометрия двух камер

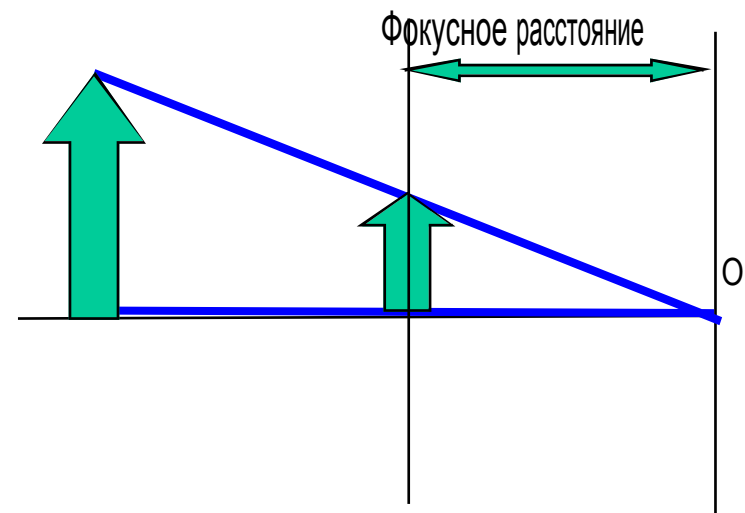
Модель



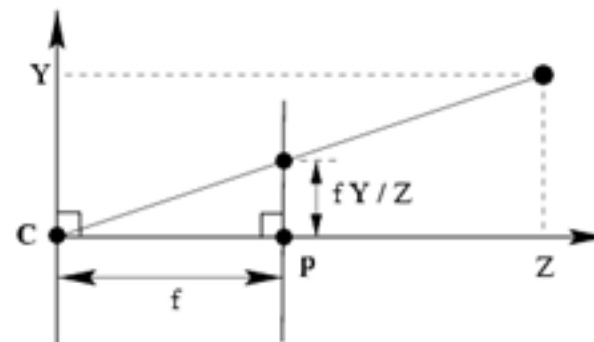
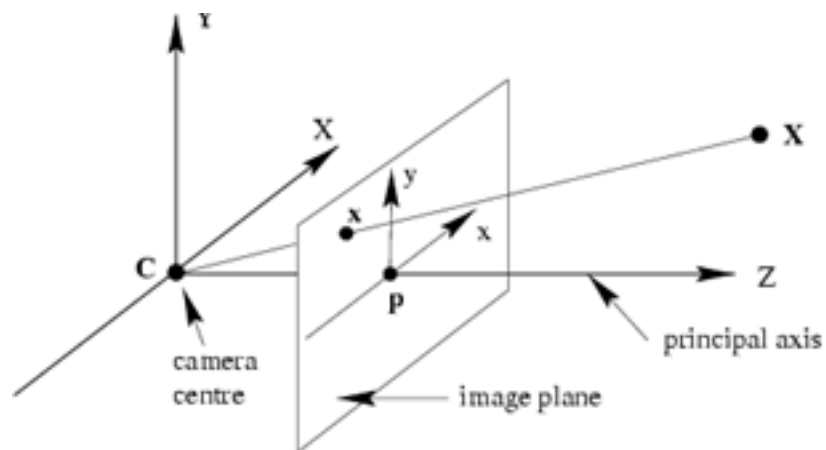
Фокусное расстояние

- Модель перспективной проекции
- Перенесем объект на противоположную сторону
- То же самое фокусное расстояние!
- Изображение нормальное, неперевернутое

- Камера-обскура
- Изображение позади фокуса
- Изображение перевернутое



Модель камеры-обскуры



$C = (0,0,0)$ – центр камеры
(проекции)

$X=(X,Y,Z)$ – точка в 3мерном
пространстве

$x=(x,y)$ – проекция X
на изображении

C , x , X лежат на одной прямой

Тогда простейшее уравнение перспективной проекции:

$$x = f \frac{X}{Z} \quad y = f \frac{Y}{Z}$$

Перспективная проекция – нелинейное
преобразование!

В линейном виде

- Хотелось бы записать всё в виде векторов или линейных преобразований
- Для этого придётся воспользоваться представлением в однородных координатах

Однородные координаты

Рассмотрим прямые на плоскости:

$$ax + by + c = 0$$

$$(ka)x + (kb)y + (kc) = 0$$

Вектор $(a, b, c)^T$

Вектор $(ka, kb, kc)^T$

- Два вектора, отличающихся масштабом, можно считать эквивалентными
- *Однородным* (homogenous) вектором назовём класс эквивалентности, по указанному отношению эквивалентности
- $(a, b, c)^T$ - экземпляр однородного вектора

- Множество классов эквивалентности векторов образуют проективное пространство $\mathbb{R}^3 - (0,0,0)^T$
 P^2

Однородные координаты

•Точка $(x, y)^T$ лежит на линии $l = (a, b, c)^T$ если $ax + by + c = 0$

$$(x, y, 1)(a, b, c)^T = 0$$

•Отметим, что $(kx, ky, k)l = 0$, только при $(x, y, 1)l = 0$

•Тогда пусть $(kx, ky, k)^T$ - представление точки $(x, y)^T$ в
однородных координатах пространства P^2

Однородные координаты

Перевод из обычных в однородных:

$$(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Однородные координаты точки изображения

$$(x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Однородные координаты точки сцены

Перевод из однородных в обычные:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

Идеальные точки

- Рассмотрим параллельные линии:

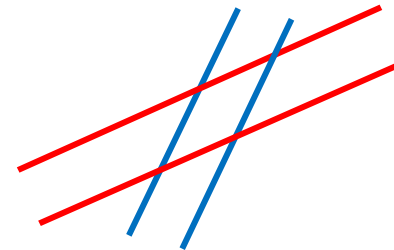
$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by + c' = 0$$

- Точка пересечения будет: $(b, -a, 0)^T$

- Точки вида $(x, y, 0)^T$ - идеальные точки в «бесконечности»

- Пример: $x=1$, $x=2$

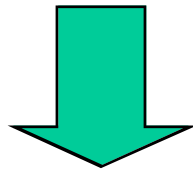


Проективное преобразование

- *Проективность (projectivity)* – это такое обратимое преобразование h из P^2 , при котором точки x_1, x_2, x_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $h(x_1), h(x_2), h(x_3)$ – лежат на одной прямой
- Отображение h в P^2 – проективность тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица H размером 3×3 , когда для любой точки x верно $h(x) = Hx$

Аффинные преобразования

$$X \rightarrow AX + T_x$$



$$\begin{bmatrix} aX + T_x \\ bY + T_y \\ cZ + T_z \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & T_x \\ 0 & b & 0 & T_y \\ 0 & 0 & c & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

P в матричной форме

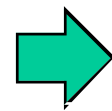
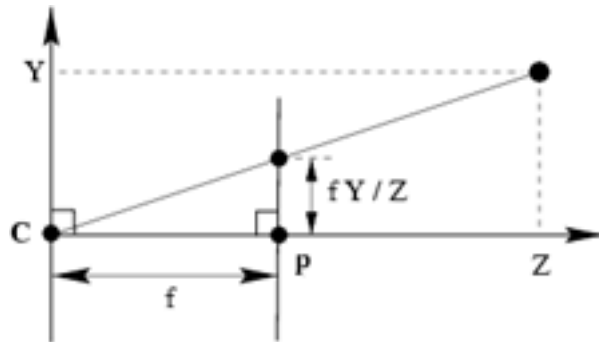
Запишем теперь перспективную проекцию в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/Z \\ Y/Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{X}{Z}$$
$$y = \frac{Y}{Z}$$

$$P = [I \mid 0]$$

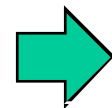
$$\lambda x = PX$$



$$x = f \frac{X}{Z} \quad y = f \frac{Y}{Z}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$P = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

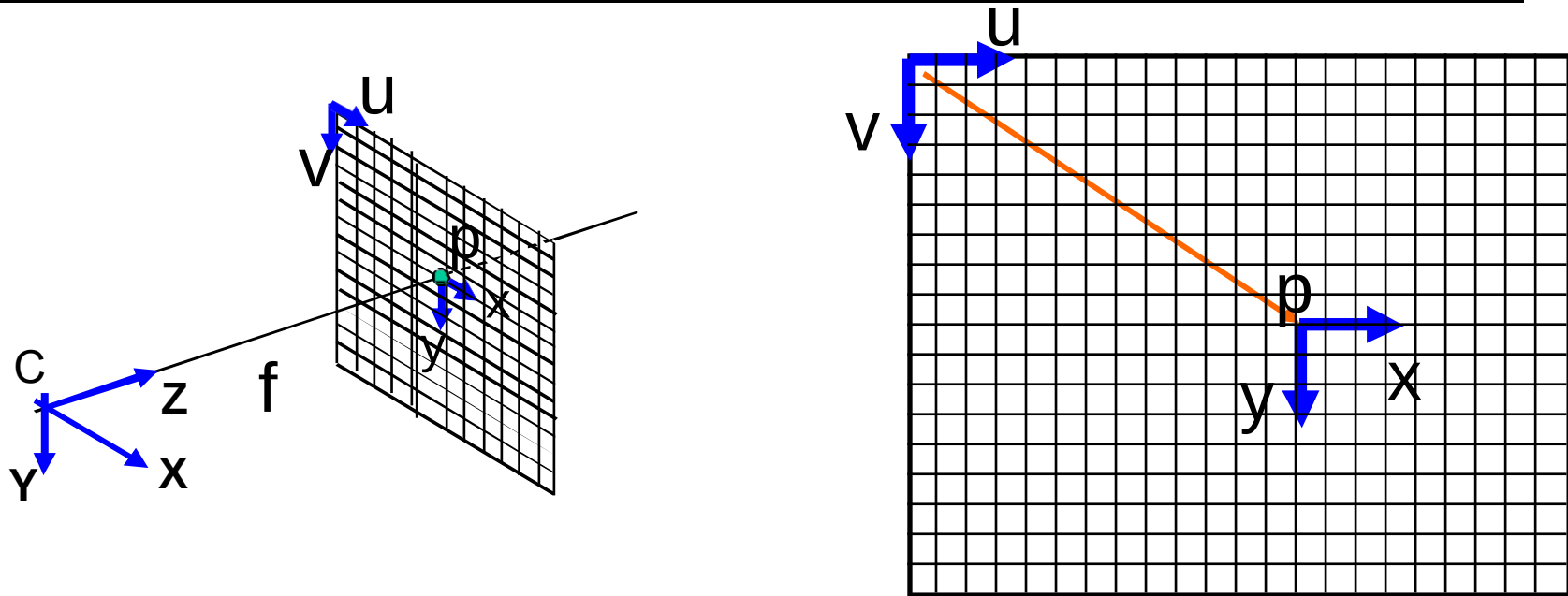


K



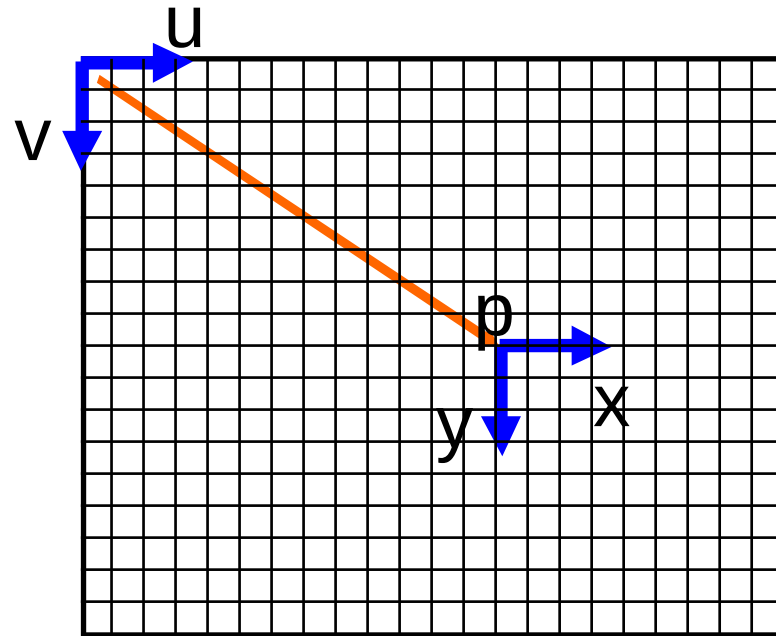
$[I | 0]$

Внутренняя калибровка



- p – основание перпендикуляра из C на картинную плоскость (принципиальная точка)
- $p = (0, 0, f)$ в мировых координатах, центр системы координат в картинной плоскости
- В картинной области расположена матрица (изображение)
- Нужно преобразовать из мировых координат в пиксельные

Внутренняя калибровка



- Для перевода в координаты изображения в пикселях нужно сделать масштабирование и сдвиг

$$(x, y) \rightarrow (sx + c_x, sy + c_y) \cong (x / pix + c_x, y / pix + c_y)$$

Где pix — размер пикселя, (c_x, c_y) — принципиальная точка в координатах изображения

Внутренняя калибровка

$$(x, y) \rightarrow (sx + c_x, sy + c_y) \cong (x / pix + c_x, y / pix + c_y)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1/pix & 0 & c_x \\ 0 & 1/pix & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/pix + c_x \\ y/pix + c_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/pix & 0 & c_x \\ 0 & 1/pix & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f/pix & 0 & c_x \\ 0 & f/pix & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

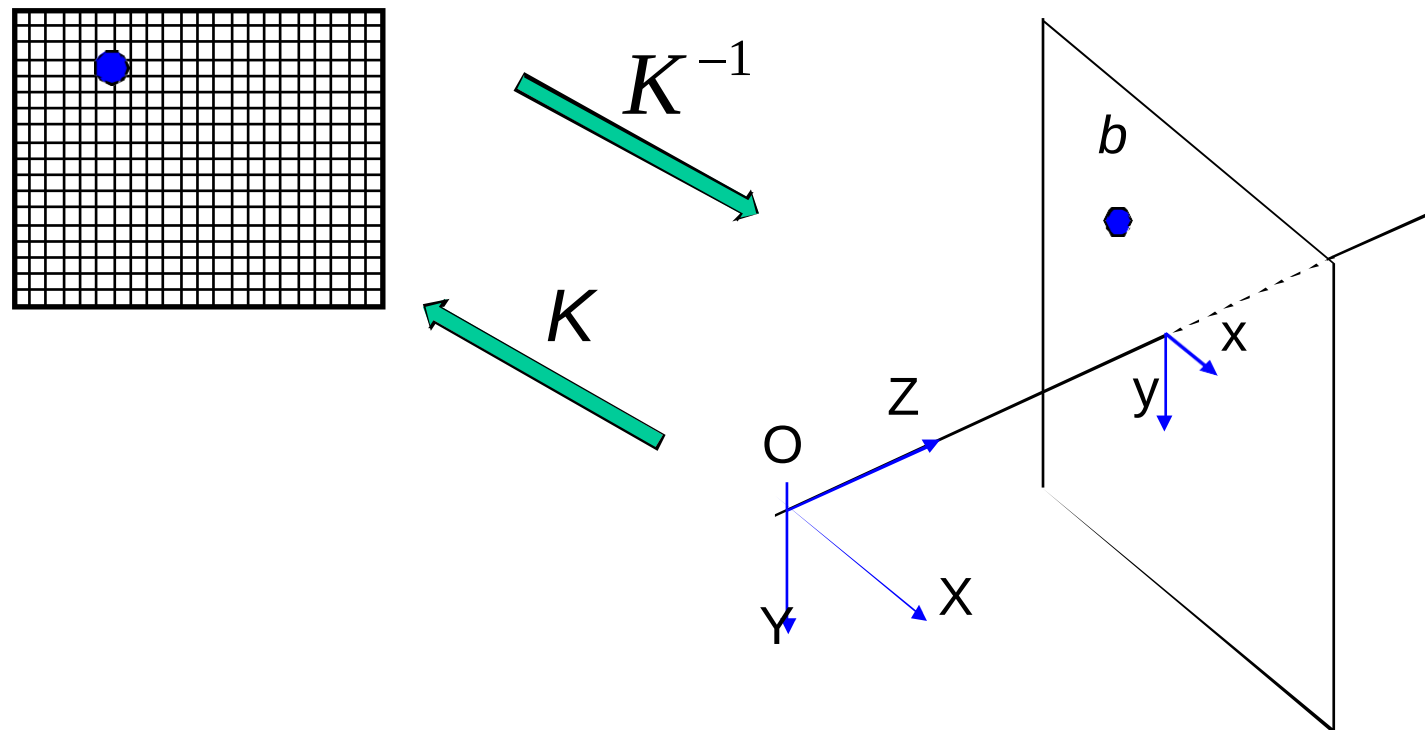
Внутренняя калибровка

Или матрица калибровки камеры (camera calibrationmatrix), internal calibration

$$K = \begin{bmatrix} a_x & s & c_x \\ 0 & a_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f / pix & s & c_x \\ 0 & f / pix & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a – масштабирующие коэффициенты
- s — наклон, угол между осями x и y изображения
- c – положение принципиальной точки изображения (в пикселях)
- f, pix – фокусное расстояние, размер пиксела

Полезно



- Внутренняя калибровка K отображает точки с картинной плоскости на изображение
- Обратная матрица K^{-1} отображает точки с изображения на картинную плоскость, с $f=1$
 - Координаты в пространстве с центром в C будут $(x, y, 1, 1)$
 - Отображение точек на изображении в лучи

Внешняя калибровка

- Матрица преобразования из мировой системы координат в систему координат камеры называется матрицей *внешней калибровки*

$$C^{-1} = \left(\begin{bmatrix} R & T \\ [0,0,0] & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ [0,0,0] & 1 \end{bmatrix}$$

- Внешняя калибровка определяется положением и ориентацией камеры в пространстве

Конечная проективная камера

$$P = K \cdot [I \mid 0] \cdot C^{-1}$$

Матрица проекции камеры

Внутренняя калибровка

Центральная проекция

Внешняя калибровка

- Матрица P размером 3×4 , которую можно факторизовать вышеуказанным образом, где K — верхнетреугольная, называется *конечной проективной камерой* (*finite projective camera*)
- У неё **11** степеней свободы (5 внутренних параметров, 3 параметра поворота и 3 параметра положения центра проекции)

Обобщенная проективная камера

- Произвольная однородная матрица ранга 3 называется *обобщенной проективной камерой* (*general projective camera*)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda x = PX$$

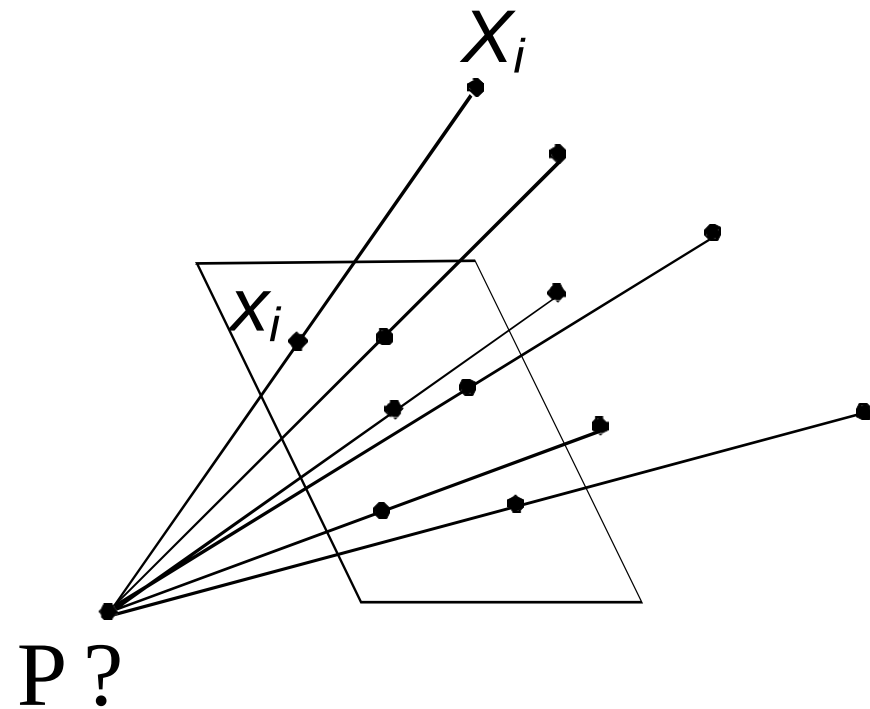
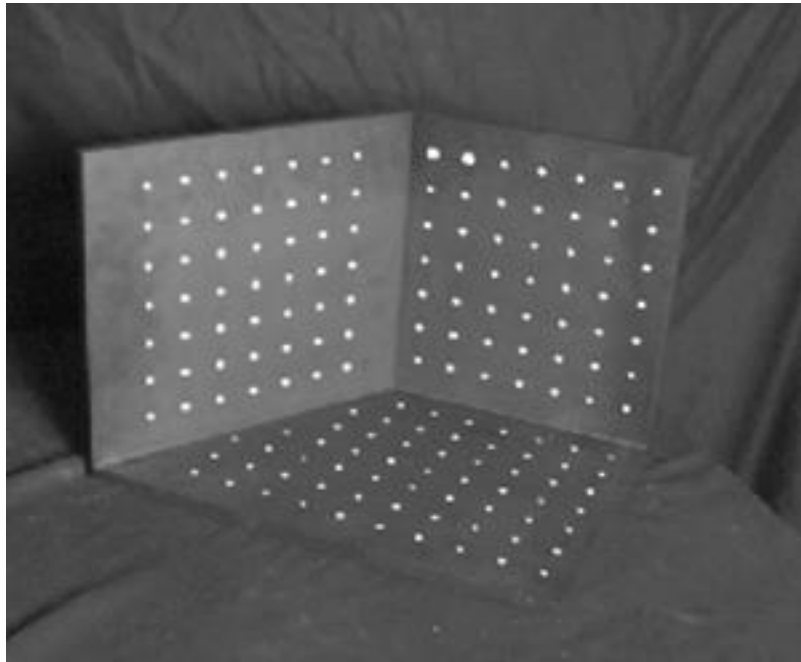
- У P в общем случае также 11 степеней свободы (неизвестных параметров)
- Если ранг < 3, тогда всё проецируется в линию или точку, а не плоскость, т.е. изображения не получается

План лекции

- Устройство фотоаппарата
- Модель перспективной проекции
- Калибровка камеры
- Гомография
- Геометрия двух камер

Калибровка камеры

- Даны n точек с известными 3D координатами X_i и известными проекциями x_i , оценить параметры камеры



SVD-разложение

- Singular Value Decomposition: $A = UDV^T$, где
 - U, V - ортогональные
 - D – диагональная (м.б. упорядочены столбцы по убыванию элементов)
 - D – состоит из сингулярных чисел
- Одно из самых важных разложений
- Связь с собственными значениями:

$$A = UDV^T$$

$$A^T A = VDU^T UDV^T$$

$$A^T A = VDDV^T = VD^2V^T$$

- Сингулярные значения – корни квадратные собственных значений матрицы $A^T A$

Калибровка камеры

- Когда мы получили матрицу проекции, нам необходимо извлечь из неё внутренние и внешние параметры калибровки
- Представим матрицу проецирования в следующем виде:

$$P = KR^T [I \mid -T] = [M \mid -MT]$$

- Для разложения M в KR^T воспользуемся RQ-факторизацией
 - Q – ортогональная матрица
 - K – верхнетреугольная
- Потом найдем T

“Золотой стандарт”

- Метод «Золотого стандарта» — метод, оптимизирующий параметры по наиболее корректной, оптимальной метрике
- В случае калибровки камеры, это расстояния от проекций 3D точек до их измеренных значений (ошибка репроекции):

$$\min_P \sum_i d^2(x_i, P X_i)$$

- Требуется использование нелинейных методов оптимизации (градиентный спуск и т.д.)

Схема калибровки камеры

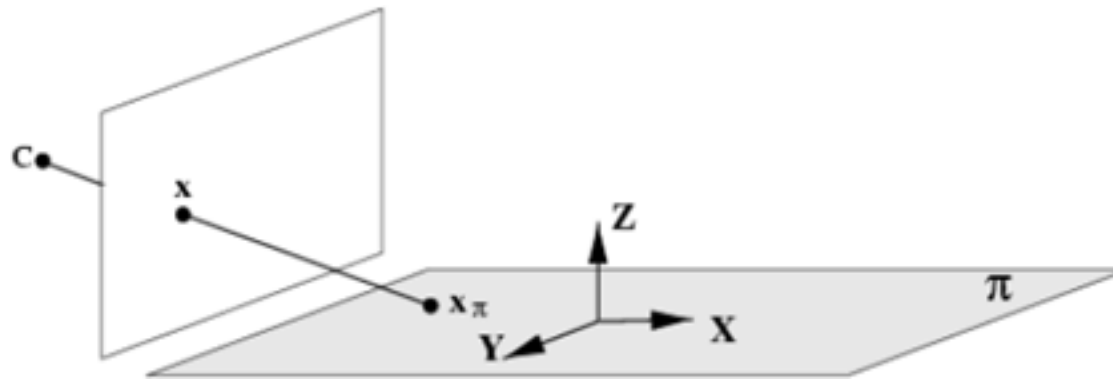
- DLT-метод для получения матрицы проецирования
- RQ-факторизация для извлечения матрицы внутренней калибровки K и внешней калибровки R и T
- Уточнение параметров калибровки с помощью нелинейной оптимизации ошибки репроекции:

$$\min_P \sum_i d^2(x_i, P X_i)$$



План лекции

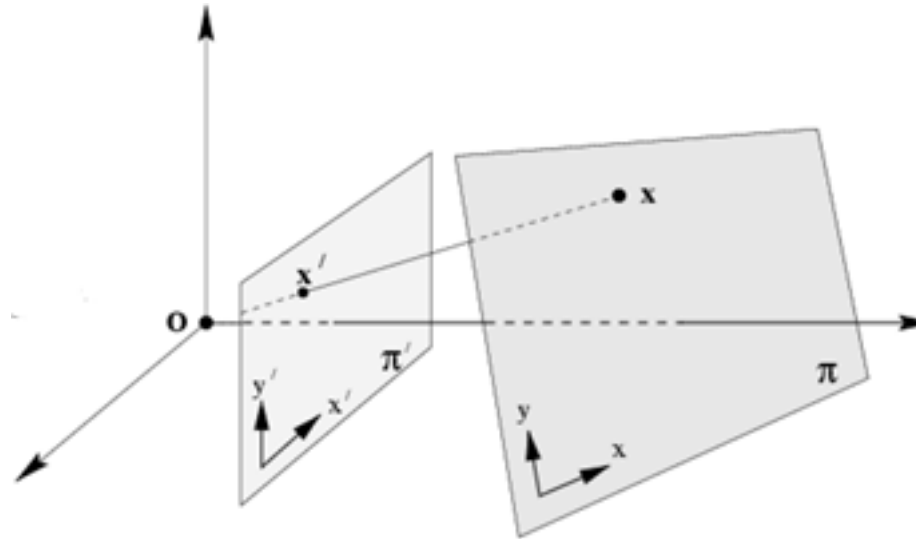
- Цифровой фотоаппарат
- Модель перспективной проекции
- Калибровка камеры
- Гомография
- Геометрия двух камер



- Перспективное преобразование плоскости (гомография)
- Пусть точка X лежит на плоскости
- Выберем специальную мировую систему координат

Гомография

- Для произвольной плоскости аналогично (умножим на матрицу евклидова преобразования)
- 8 степеней свободы



-
- (x, x') – известные соответствия на 2х изображениях
 - Линейный (DLT) метод:
 - Составим систему линейных уравнений

$$\lambda x' = Hx$$

- Каждое соответствие даст 2 уравнения на параметры H
 - 4 соответствия дадут 8 уравнений на 8 неизвестных
 - Никакие 3 не должны лежать на одной прямой!
 - Можем взять и больше соответствий...
- Сведем к однородной задаче наименьших квадратов
 - Уже знаем, как решать!

Вычисление гомографии

- Критерий полурешения (transfer error)

$$\sum_i d^2(x'_i, Hx_i) + d^2(H^{-1}x'_i, x_i)$$

- Вычислить достаточно просто

- Оптимальный критерий (distance error)

$$\sum_i d^2(x'_i, \hat{x}'_i) + d^2(x_i, \hat{x}_i)$$

где $\hat{x}'_i = H\hat{x}_i$ - идеальное соответствие

- Нужно вычислять «идеальные соответствия», это сложно

Использование гомографии

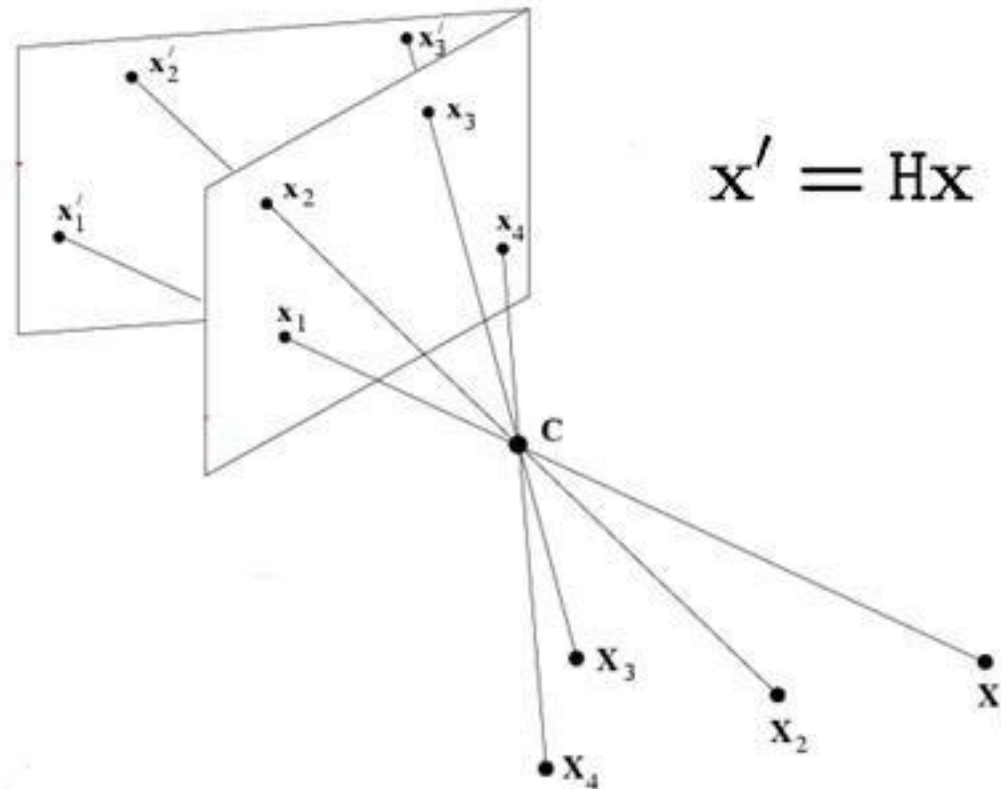
- 4 соответствия (x, x') , из которых никакие 3 не лежат на одной прямой, определяют гомографию H
- Значит, любые 4 точки в общей позиции можно преобразовать в любые 4 другие точки в общей позиции
- Это можно использовать

Ректификация изображения



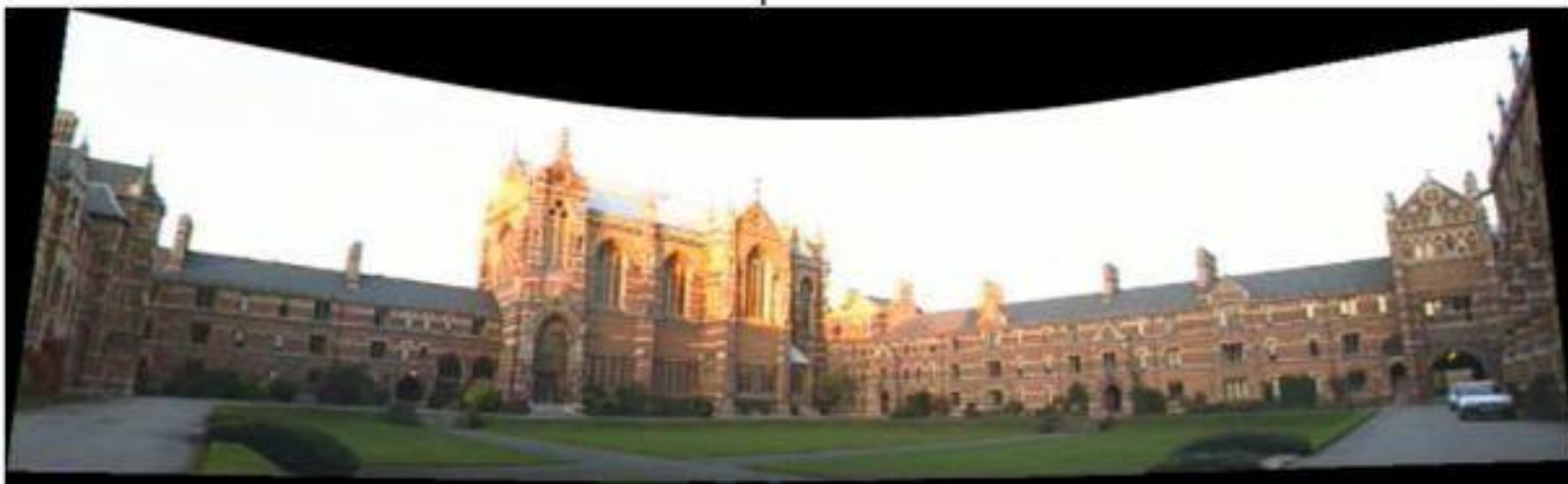
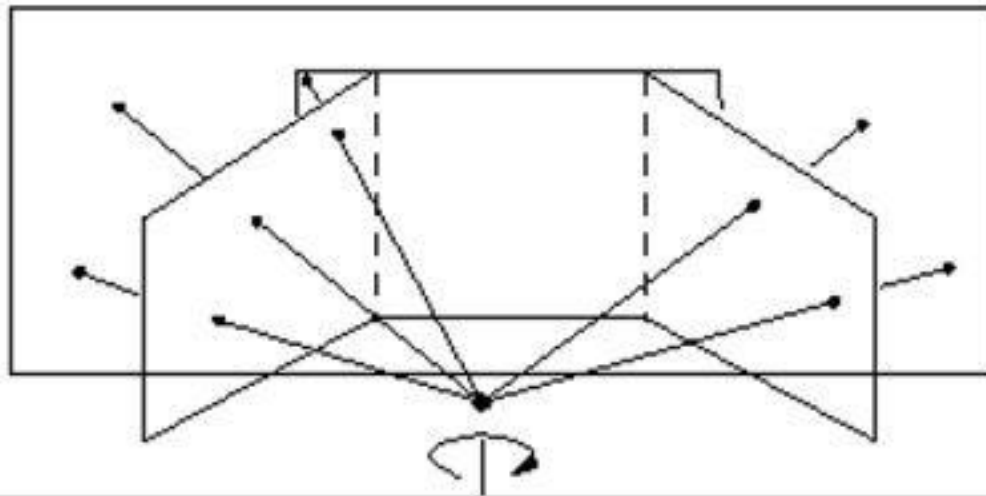
- Выбираем 4 точки, которые являются вершинами прямоугольника с известными размерами
- Вычисляем гомографию (4е точки $\rightarrow$ прямоугольник)
- Развертываем изображение
- Можем измерять расстояния на плоскости!

Стационарная камера



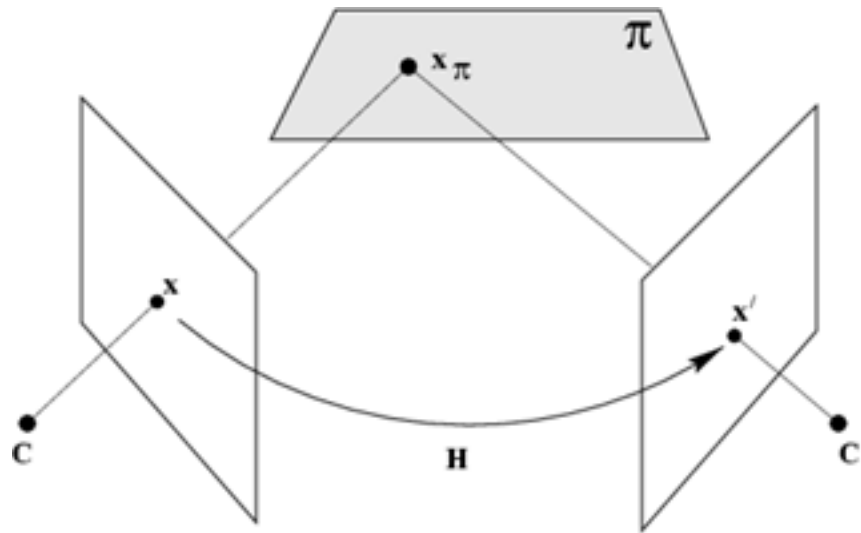
Если центр камеры не изменился, то одно изображение преобразуется в другое гомографией

Построение мозаики (панорамы)



Проецируем все изображения на общую плоскость

Плоская сцена



$$x = H_{1\pi} x_\pi \quad x' = H_{2\pi} x_\pi$$

$$x' = H_{2\pi} x_\pi$$

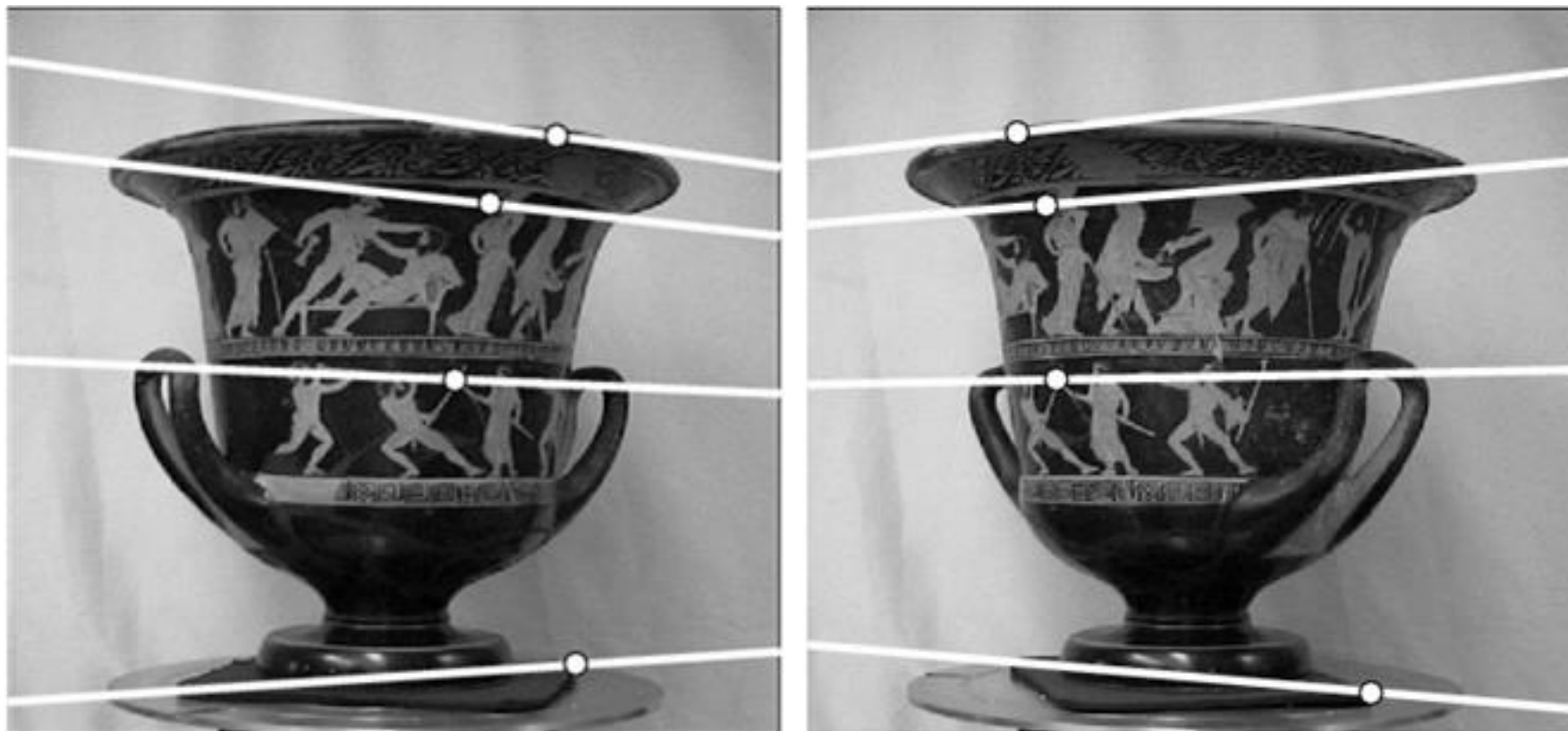
$$= H_{2\pi} H_{1\pi}^{-1} x = Hx$$

- Если наблюдаемая сцена – плоская, тогда преобразование точек между изображениями можно тоже описать гомографией
- Этот результат используется в дальнейшем

План лекции

- Цифровой фотоаппарат
- Модель перспективной проекции
- Калибровка камеры
- Гомография
- Геометрия двух камер

Геометрия 2х камер



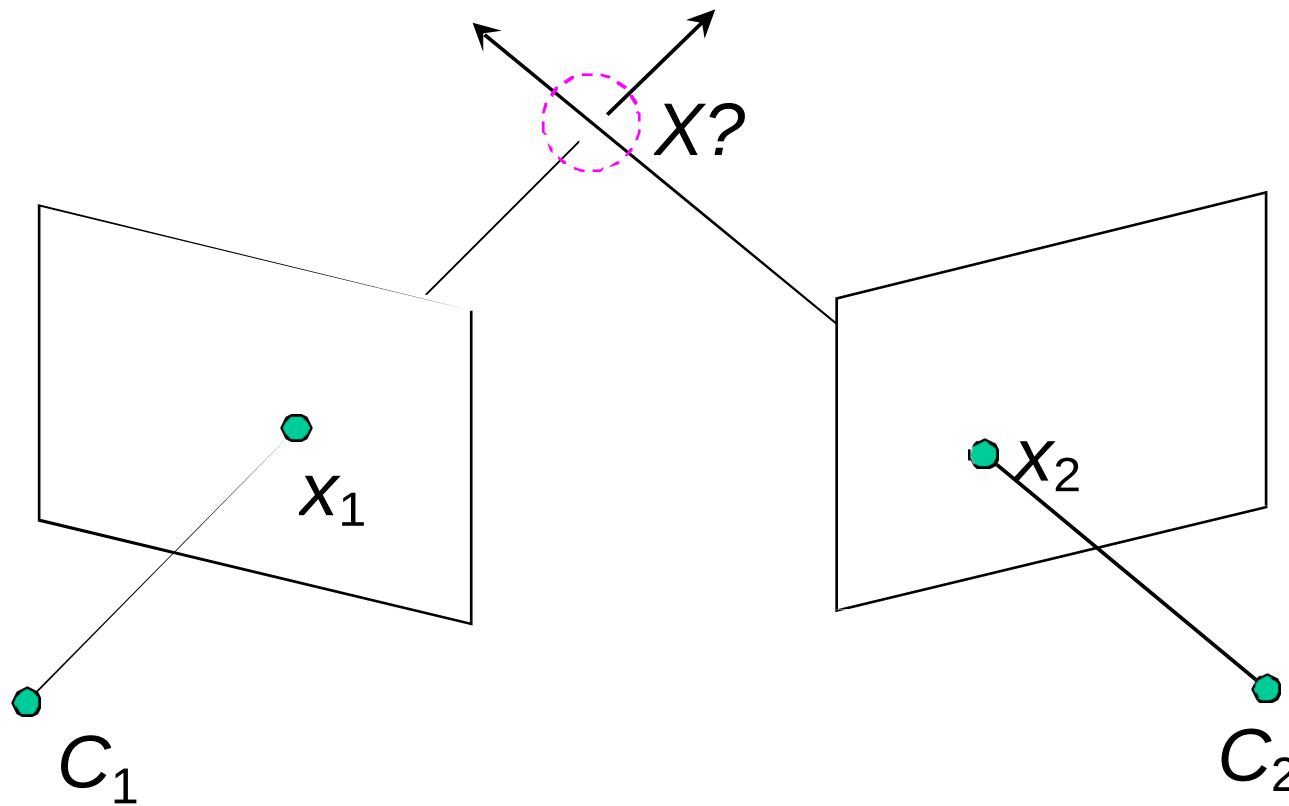
Рассмотрим случай, когда два снимка одной и той же сцены получены с разных ракурсов (разные центры проекций)

Задачи многовидовой геометрии

- **Геометрия сцены (структура)** : Пусть даны соответствующие точки в 2D на 2х и более изображениях, определить координаты соответствующих точек в 3D
- **Соответствие (стерео-сопоставление)** : Данаточка в одном изображении, как мы можем ограничить положение соответствующей точки на втором изображении?
- **Калибровка камер (движение)**: Дан набор соответствующих точек в 2х и более изображениях, определить матрицы калибровкикамер для этих изображений (видов)

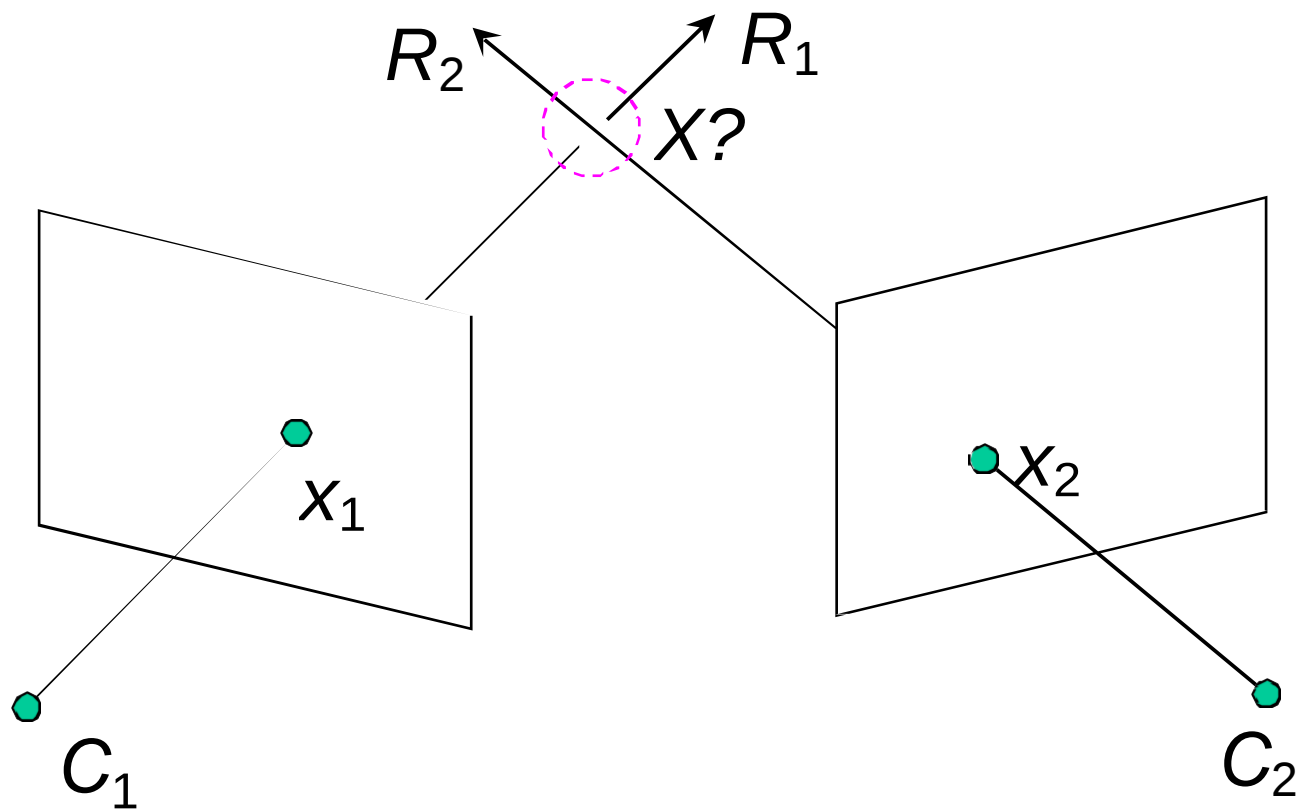
Триангуляция (геометрия сцены)

- Даны проекции x_1, x_2 точки $X=(X,Y,Z)$ на 2 или более изображения (с известными матрицами калибровки), найти координаты точки



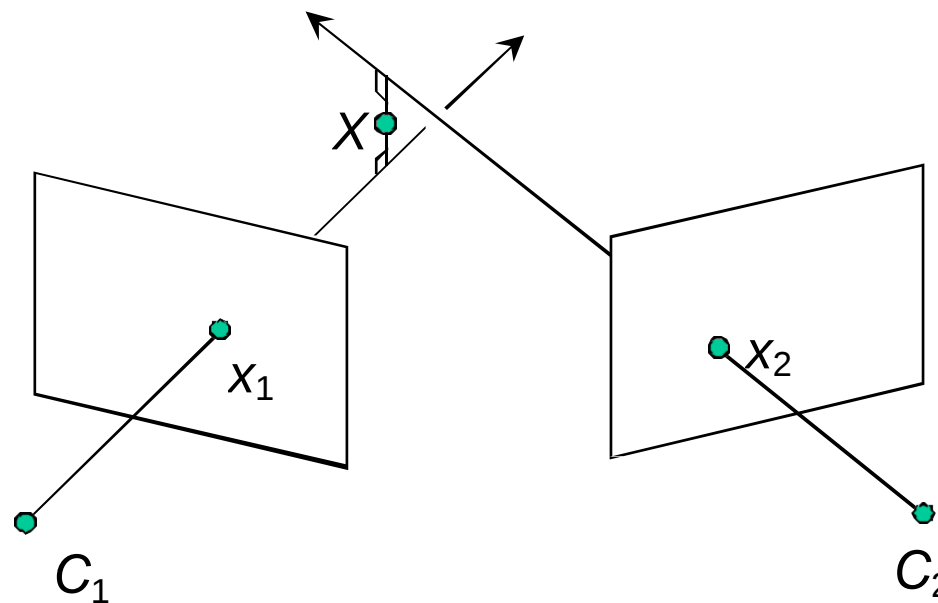
Триангуляция

- Можно найти пересечение лучей, соответствующих точкам X_1 и X_2 , однако из-за ошибок измерения и оценки они не пересекаются



Геометрический подход

- Найдем кратчайший отрезок, соединяющий два луча и пусть X будет средней точкой на этом отрезке
- Алгоритм средней точки (midpoint)



R. I. Hartley and P. Sturm, Triangulation, *CVIU*, 1997

Линейный подход

$$\lambda_1 x_1 = P_1 X \quad x_1 \times P_1 X = 0 \quad [x_1]_{\times} P_1 X = 0$$

$$\lambda_2 x_2 = P_2 X \quad x_2 \times P_2 X = 0 \quad [x_2]_{\times} P_2 X = 0$$

Проекция на каждую камеру даст 2 уравнения на X

$$x_1(p_1^{3T} X) - (p_1^{1T} X) = 0$$

$$y_2(p_1^{3T} X) - (p_1^{2T} X) = 0$$

Проекция на обе камеры приведет к знакомой задаче на

однородные наименьшие квадраты

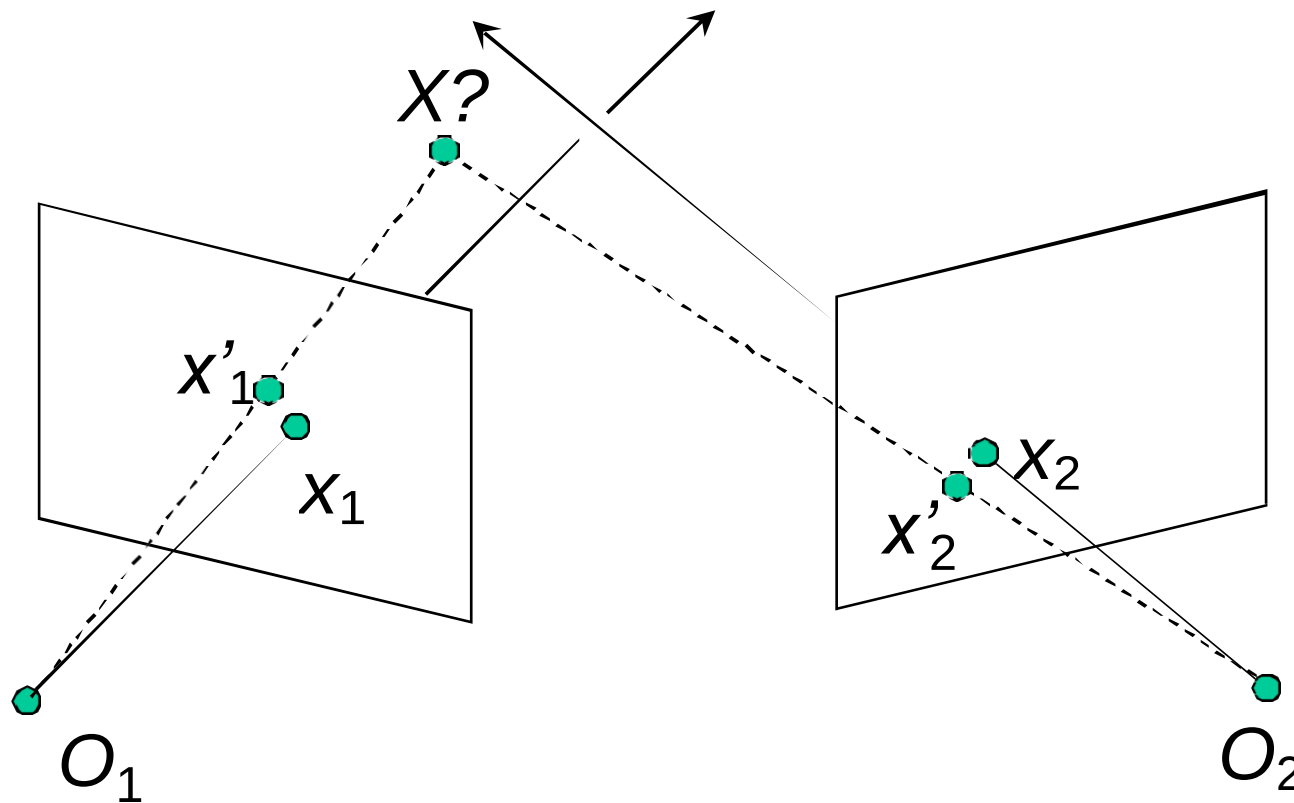
$$A = \begin{bmatrix} x_1 p_1^{3T} - p_1^{1T} \\ y_1 p_1^{3T} - p_1^{2T} \\ x_2 p_2^{3T} - p_2^{1T} \\ y_2 p_2^{3T} - p_2^{2T} \end{bmatrix} X = 0 \quad AX = 0$$

$$\|X\| = 1$$

Нелинейный подход

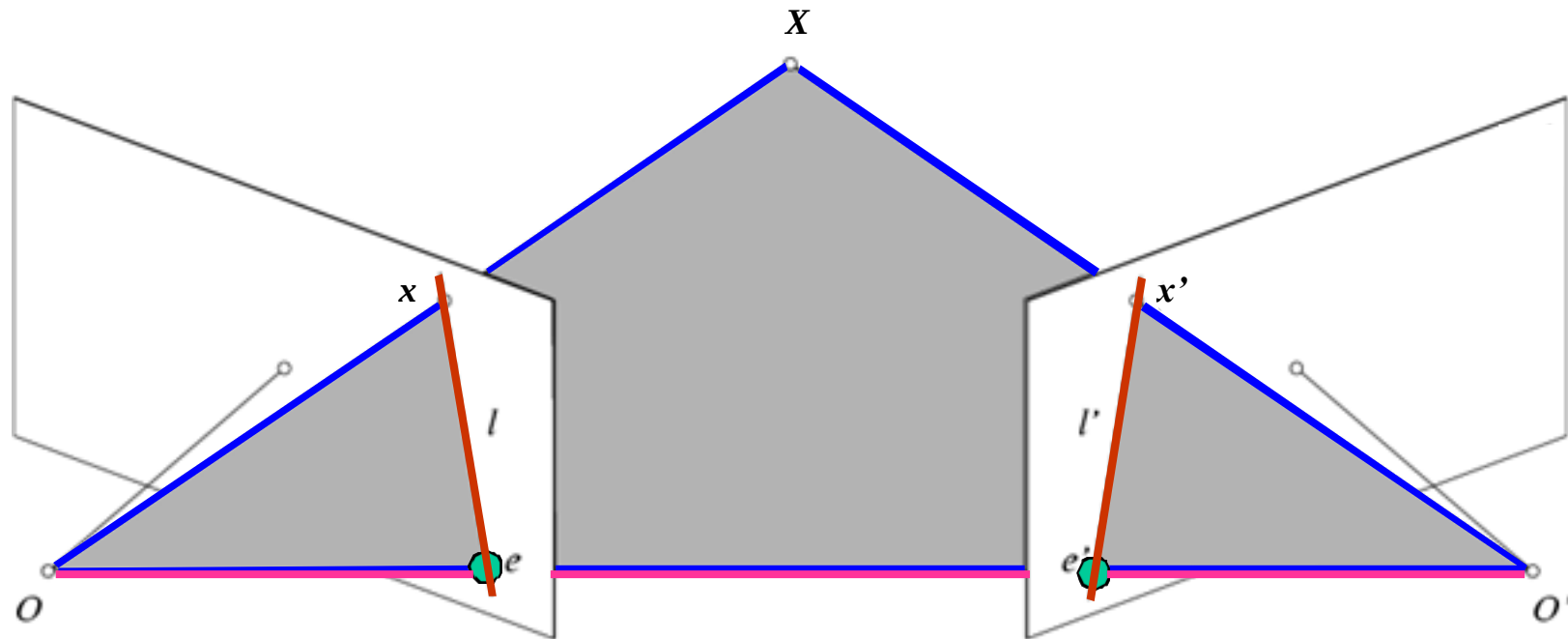
- Найти X , минимизирующий ошибку

$$d^2(x_1, P_1 X) + d^2(x_2, P_2 X)$$



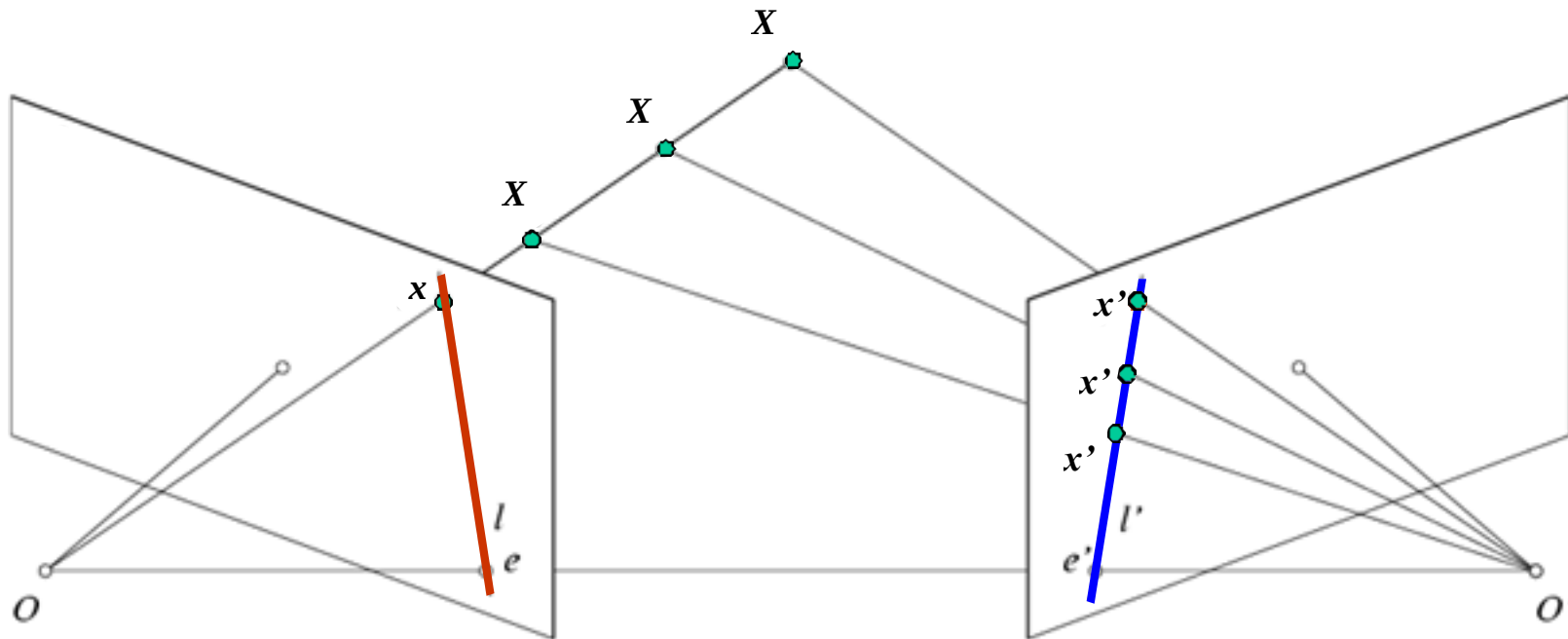
- Требуется применение нелинейной оптимизации
- Результат DLT используем как начальное приближение

Эпилярная геометрия



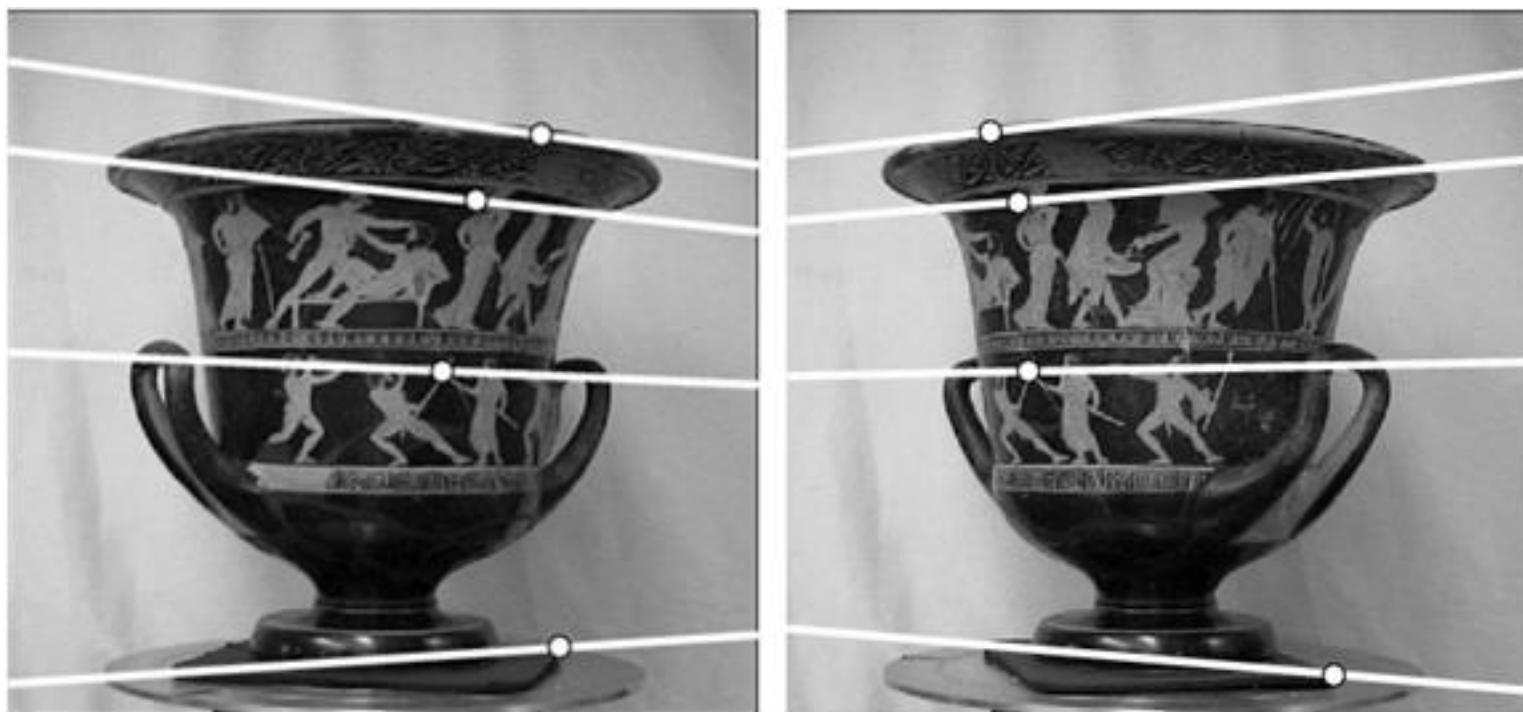
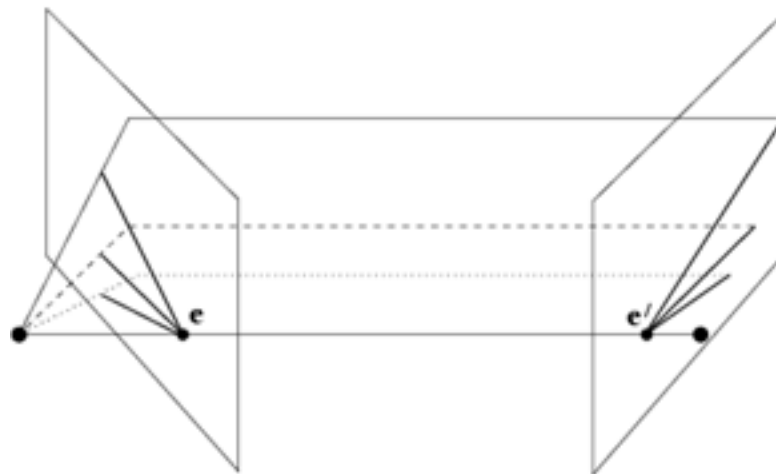
- **Базовая линия (Baseline)** – линия, соединяющая центры камер
- **Эпилярная плоскость (Epipolar Plane)** – плоскость, проходящая через базовую линию (пучок плоскостей))
- **Эпиполи/Эпиполяры (Epiroles)**
 - = пересечение базовой линии с картинными плоскостями
 - = проекции центра проекций второй камеры
- **Эпилярные линии (Epipolar Lines)** – пересечение эпилярной плоскости с картинной плоскостью (дают соответствующие пары)

Эпилярное ограничение



- Пусть даны изображения I и I' с центрами проекции O и O' , и проекция x точки X (неизвестной) на изображение I .
- Что мы можем сказать про точку x' – проекцию X на I' ?
 - x' должна лежать на эпилярной линии l'
- Эпилярное ограничение:
 - Проекция x и x' точки сцены X на изображения I и I' должны лежать на соответствующих эпилярных линиях l и l'

Пример: Сближающиеся камеры

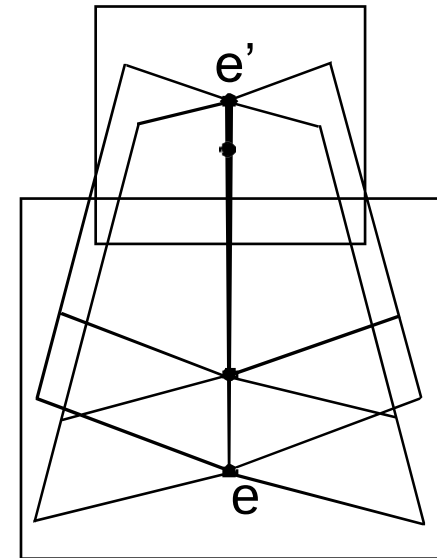
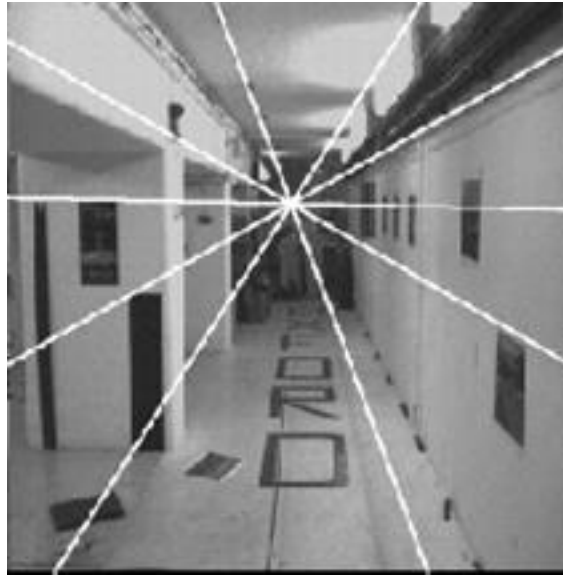


Пример: стереопара



Движение, параллельное картинной плоскости

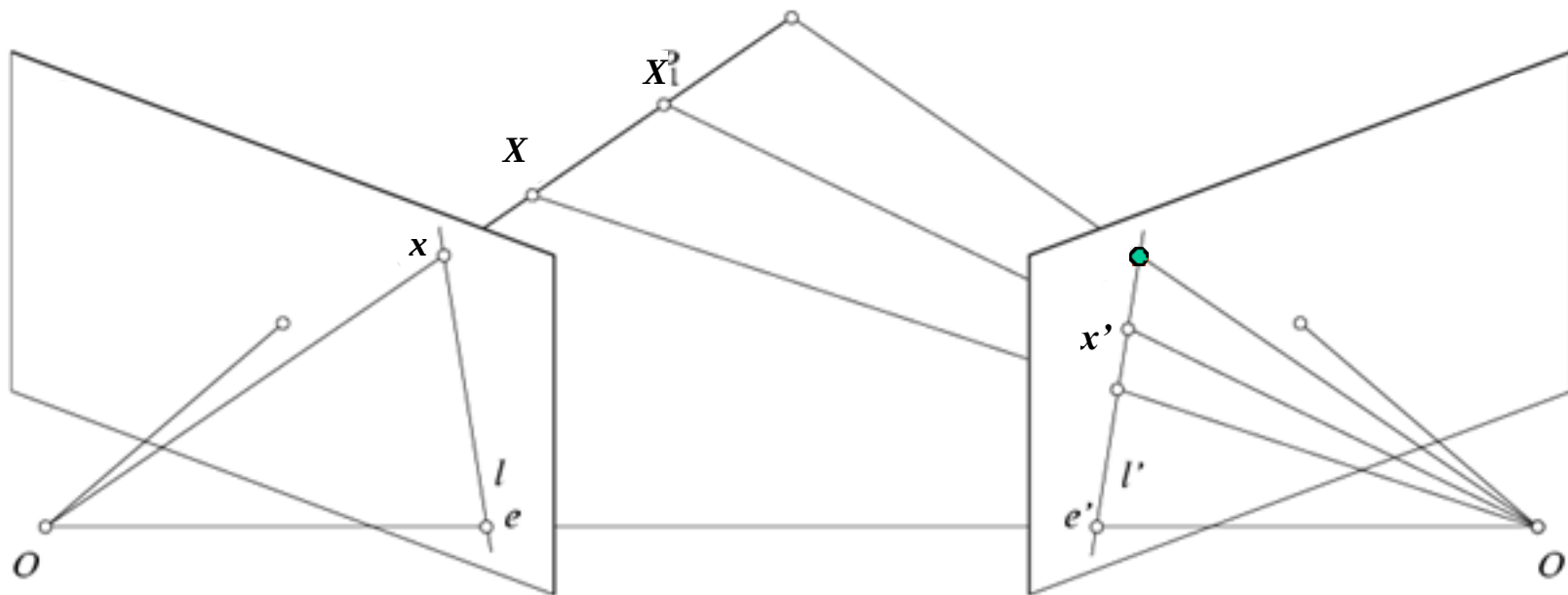
Пример: движение вперед



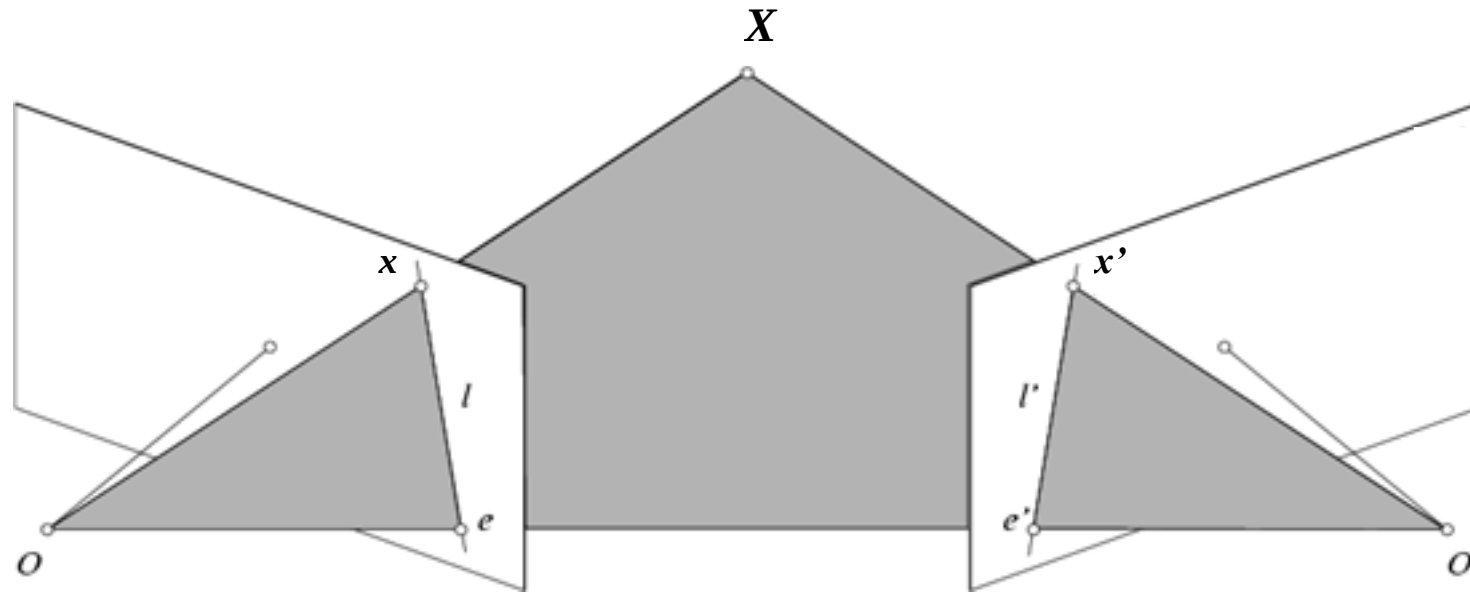
У эпиполей одинаковы координаты в обоих изображениях.

Точки движутся вдоль линий, исходящих из e — «фокуса расширения»

Эпиполярное ограничение



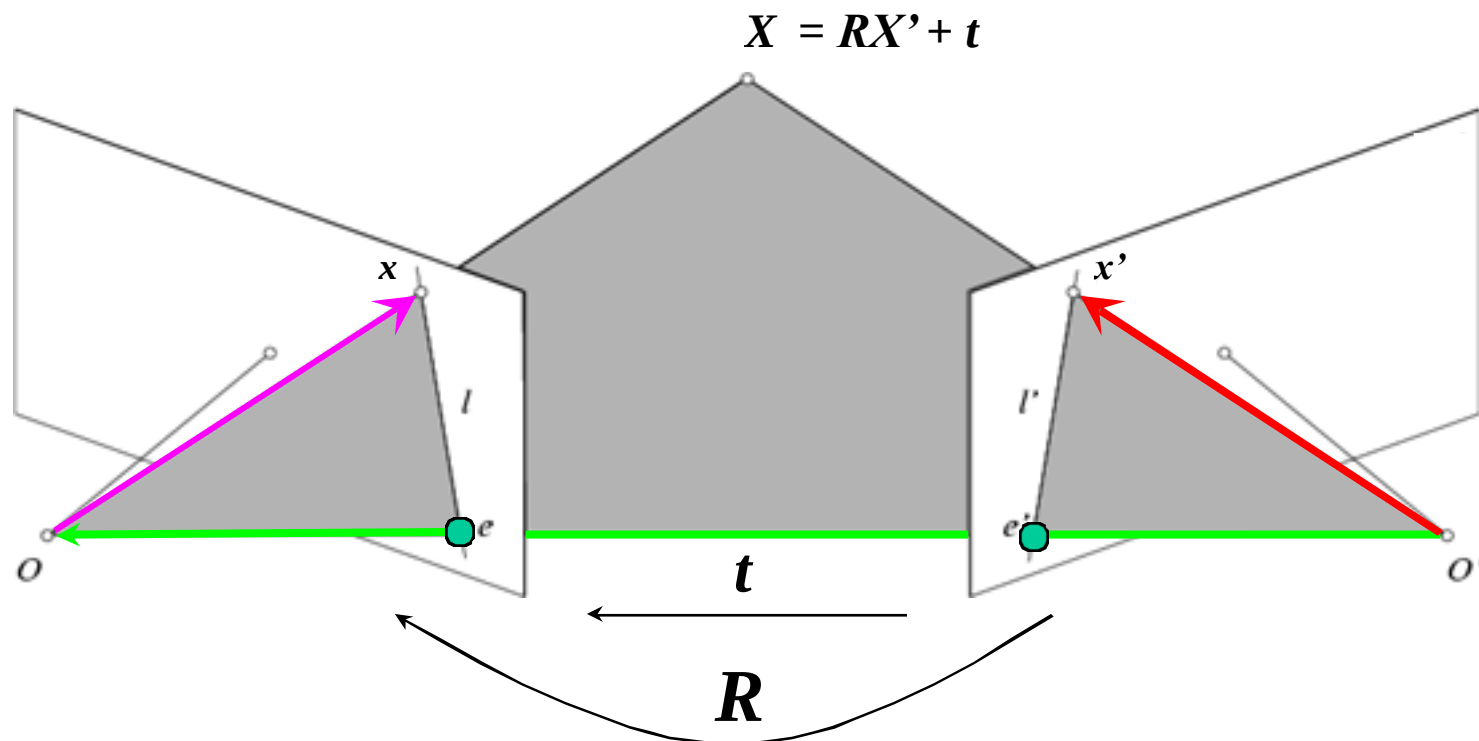
- Интересный вывод:
 - Линия l' не зависит от X , если x и калибровка камер известна
 - Линия l не зависит от X , если x' и калибровка камер известна
 - Между x , x' и калибровкой камер существует зависимость
 - Попробуем её вывести



- Совместим глобальную систему координат с координатной системой первой камеры
- Допустим, известны внутренние калибровки камер K , K' и внешняя калибровка второй камеры R и T
- Умножим матрицу проекции каждой камеры на обратную матрицу калибровки K^{-1} , K'^{-1}
 - Также отобразим точки x , x' с изображения на картинную плоскость

Калиброванный

случай



Матрица камеры $[I|0]$

$$X = (u, v, w, 1)^T$$

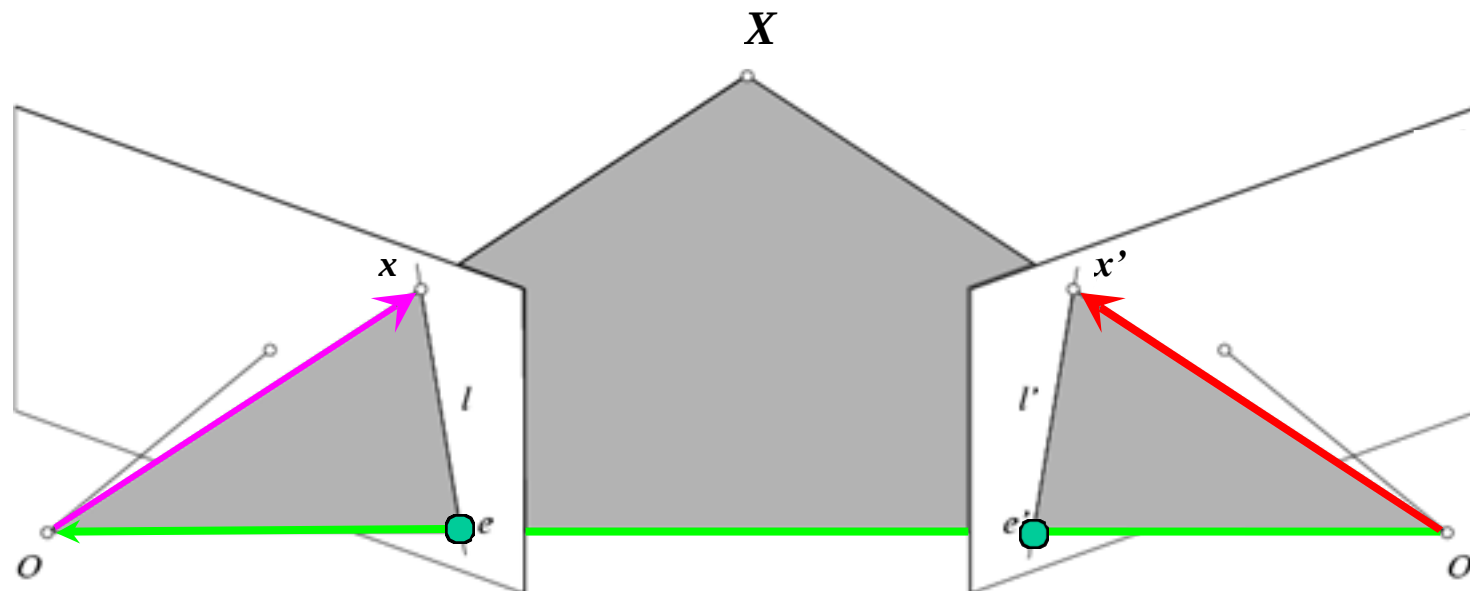
$$x = (u, v, w)^T$$

Матрица камеры: $[R^T | -R^T t]$ Вектор x' во второй системе координат имеет координаты Rx' в первой

Вектора x , t , и Rx' копланарны

Калиброванный

случай

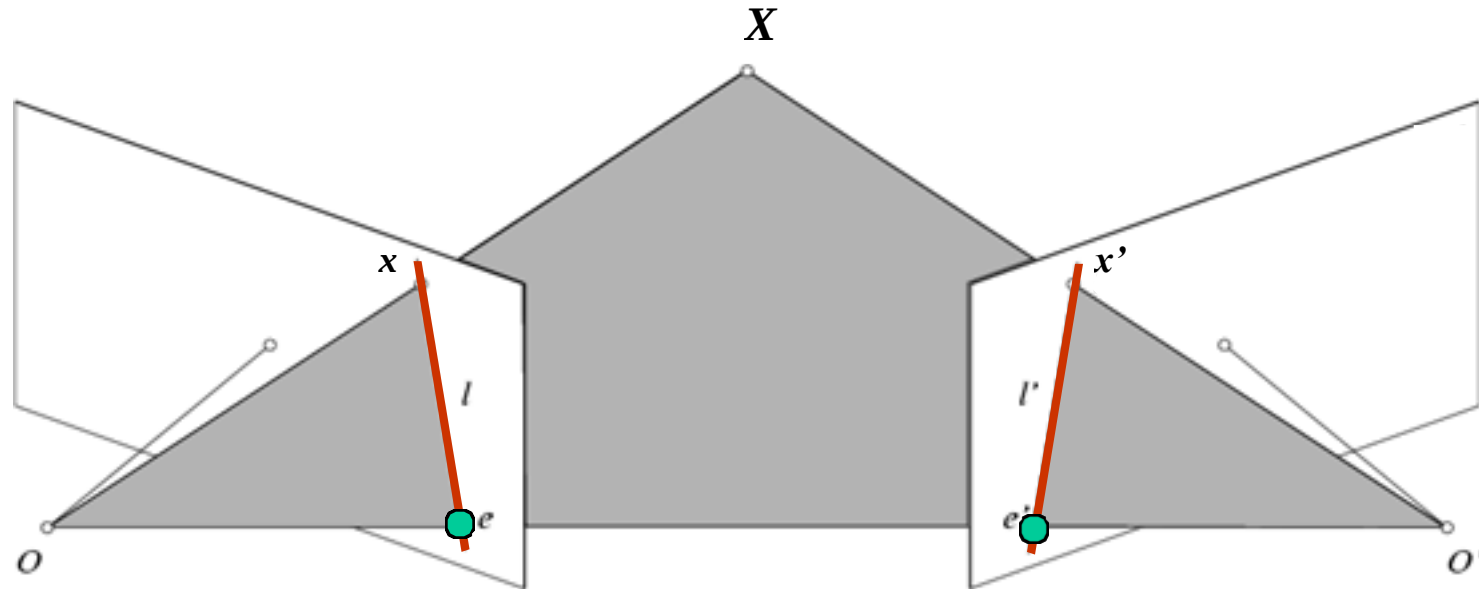


$$x \cdot [t \times (Rx')] = 0 \quad \Rightarrow \quad x^T E x' = 0 \quad \text{где} \quad E = [t_x]R$$

**Существенная матрица
(Essential Matrix)
(Longuet-Higgins, 1981)**

Вектора x , t , и Rx' копланарны

Свойства существенной матрицы

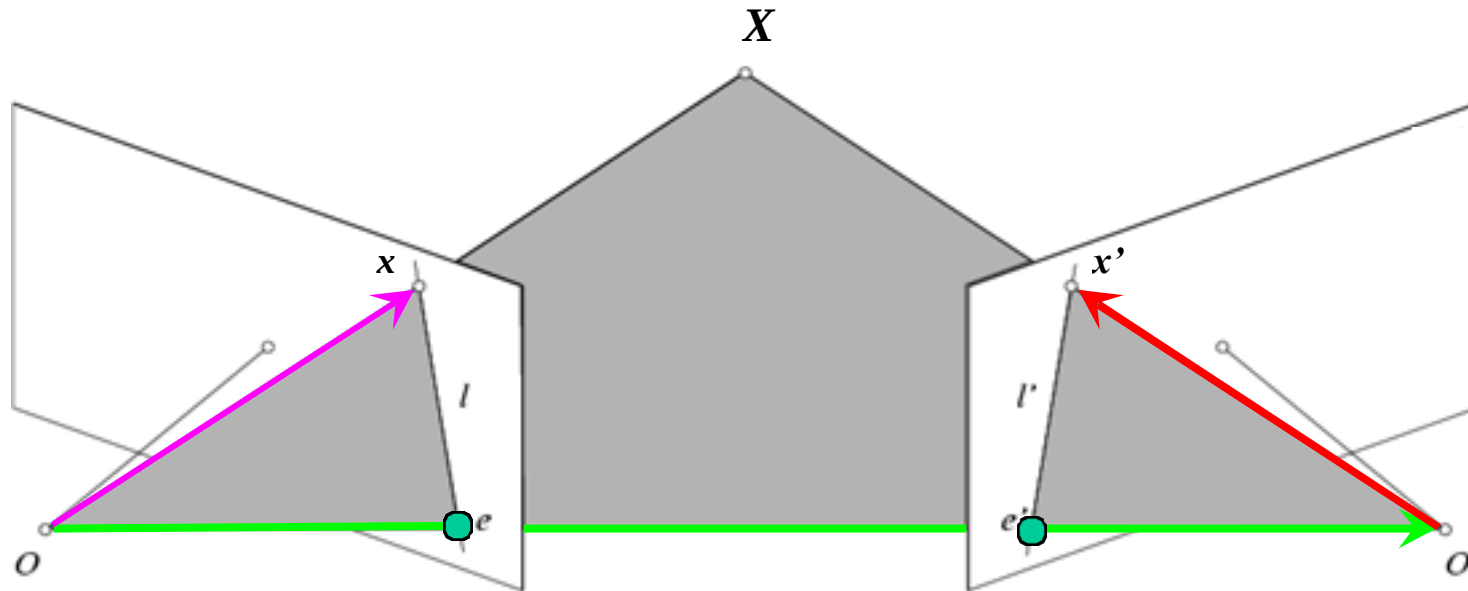


$$x \cdot [t \times (Rx')] = 0 \quad \Rightarrow \quad x^T E x' = 0 \quad \text{где} \quad E = [t_x] R$$

- $E x'$ - эпполярная линия, соответствующая x' ($l = E x'$)
- $E^T x$ - эпполярная линия, соответствующая x ($l' = E^T x$)
- $E e' = 0$ и $E^T e = 0$
- E вырождена (ранг 2)
- E имеет 5 степеней свободы

Некалиброванный

случай



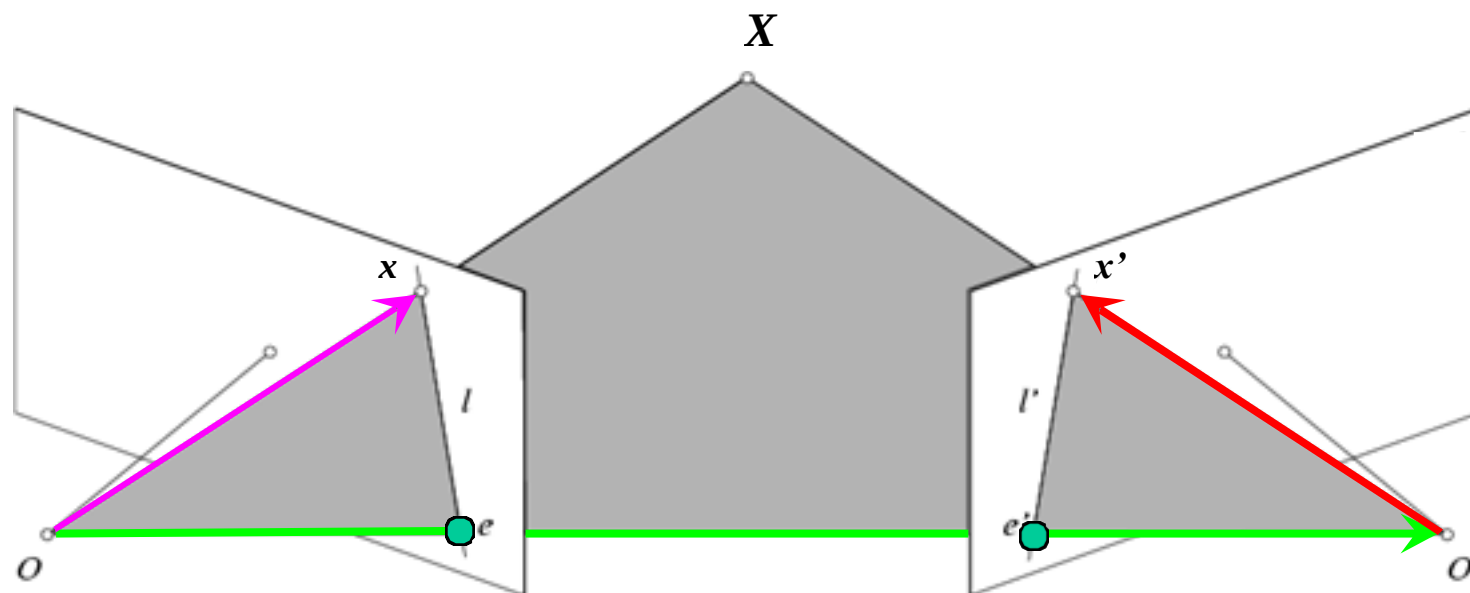
- Пусть матрицы калибровки K и K' для обеих камер неизвестны
- Запишем эпполярное ограничение через *неизвестные* нормализованные координаты:

$$\hat{x}^T E \hat{x}' = 0$$

$$x = K \hat{x}, \quad x' = K' \hat{x}'$$

Некалиброванный

случай



$$\hat{x}^T E \hat{x}' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^T F x' = 0 \quad \text{где} \quad F = K^{-T} E K'^{-1}$$

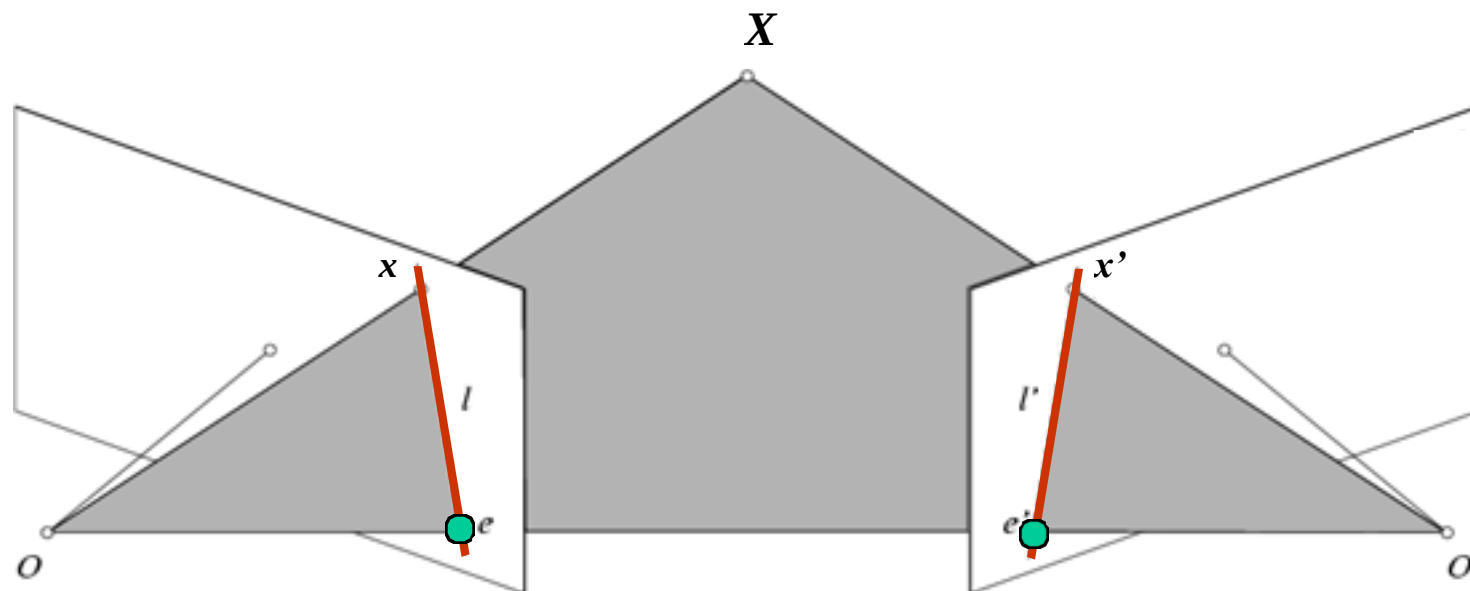
$$x = K \hat{x}$$

$$x' = K' \hat{x}'$$

**Фундаментальная матрица
(Fundamental Matrix)**

(Faugeras and Luong, 1992)

Свойства



$$\hat{x}^T E \hat{x}' = 0 \quad \longrightarrow \quad x^T F x' = 0 \quad \text{где} \quad F = K^{-T} E K'^{-1}$$

- $F x$ - эпиполярная линия, соответствующая x' ($l = F x$)
- $F^T x$ - эпиполярная линия, соответствующая x ($l' = F^T x$)
- $F e' = 0$ и $F^T e = 0$
- F вырождена (ранг 2)
- F имеет семь степеней свободы

8-и точечный алгоритм

- Фундаментальная матрица накладывает ограничения на пары соответствующих точек
- Попробуем её вычислить напрямую из соответствий, без калибровки камеры

- Даны соответствия (x, x') : $x = (u, v, 1)^T$, $x' = (u', v', 1)^T$

$$(u, v, 1) \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (uu', uv', u, vu', vv', v, u', v', 1) \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{pmatrix} = 0$$

- 1 соответствие даёт 1 уравнение на F
- Если точек много, можем свести к обычной задаче однородных наименьших квадратов

8-и точечный алгоритм

$$(uu', uv', u, vu', vv', v, u', v', 1) \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} u_1 u'_1 & u_1 v'_1 & u_1 & v_1 u'_1 & v_1 v'_1 & v_1 & u'_1 & v'_1 \\ u_2 u'_2 & u_2 v'_2 & u_2 & v_2 u'_2 & v_2 v'_2 & v_2 & u'_2 & v'_2 \\ u_3 u'_3 & u_3 v'_3 & u_3 & v_3 u'_3 & v_3 v'_3 & v_3 & u'_3 & v'_3 \\ u_4 u'_4 & u_4 v'_4 & u_4 & v_4 u'_4 & v_4 v'_4 & v_4 & u'_4 & v'_4 \\ u_5 u'_5 & u_5 v'_5 & u_5 & v_5 u'_5 & v_5 v'_5 & v_5 & u'_5 & v'_5 \\ u_6 u'_6 & u_6 v'_6 & u_6 & v_6 u'_6 & v_6 v'_6 & v_6 & u'_6 & v'_6 \\ u_7 u'_7 & u_7 v'_7 & u_7 & v_7 u'_7 & v_7 v'_7 & v_7 & u'_7 & v'_7 \\ u_8 u'_8 & u_8 v'_8 & u_8 & v_8 u'_8 & v_8 v'_8 & v_8 & u'_8 & v'_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Минимизируем:

$$\sum_{i=1}^N (x_i^T F x'_i)^2$$

При условии

$$|F|^2 = 1$$

Приведение к рангу 2

- Фундаментальная матрица F имеет ранг 2
- В общем случае, результат DLT-оценки F имеет ранг 3 (из-за влияния шума)
- Необходимо привести к рангу 2
- Найдем F' , минимизирующую норму Фробениуса:

$$\|F - F'\|, \text{ где } \text{rang}(F') = 2$$

- Воспользуемся SVD-разложением:
- $F = UDV^T$, или $F = U \text{diag}(r, s, t) V^T$, где $r \geq s \geq t$
- $F' = U \text{diag}(r, s, 0) V^T$

Недостатки 8и точечного метода

$$\begin{pmatrix} u_1 u'_1 & u_1 v'_1 & u_1 & v_1 u'_1 & v_1 v'_1 & v_1 & u'_1 & v'_1 \\ u_2 u'_2 & u_2 v'_2 & u_2 & v_2 u'_2 & v_2 v'_2 & v_2 & u'_2 & v'_2 \\ u_3 u'_3 & u_3 v'_3 & u_3 & v_3 u'_3 & v_3 v'_3 & v_3 & u'_3 & v'_3 \\ u_4 u'_4 & u_4 v'_4 & u_4 & v_4 u'_4 & v_4 v'_4 & v_4 & u'_4 & v'_4 \\ u_5 u'_5 & u_5 v'_5 & u_5 & v_5 u'_5 & v_5 v'_5 & v_5 & u'_5 & v'_5 \\ u_6 u'_6 & u_6 v'_6 & u_6 & v_6 u'_6 & v_6 v'_6 & v_6 & u'_6 & v'_6 \\ u_7 u'_7 & u_7 v'_7 & u_7 & v_7 u'_7 & v_7 v'_7 & v_7 & u'_7 & v'_7 \\ u_8 u'_8 & u_8 v'_8 & u_8 & v_8 u'_8 & v_8 v'_8 & v_8 & u'_8 & v'_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Недостатки 8и точечного метода

250906.36	183269.57	921.81	200931.10	146766.13	738.21	272.19	198.81
2692.28	131633.03	176.27	6196.73	302975.59	405.71	15.27	746.79
416374.23	871684.30	935.47	408110.89	854384.92	916.90	445.10	931.81
191183.60	171759.40	410.27	416435.62	374125.90	893.65	465.99	418.65
48988.86	30401.76	57.89	298604.57	185309.58	352.87	846.22	525.15
164786.04	546559.67	813.17	1998.37	6628.15	9.86	202.65	672.14
116407.01	2727.75	138.89	169941.27	3982.21	202.77	838.12	19.64
135384.58	75411.13	198.72	411350.03	229127.78	603.79	681.28	379.48

$$\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Плохая численная обусловленность
- Можно поправить масштабированием данных

Нормализованный 8-точечный

(Hartley, 1995)

- Переносим центр данных с изображения в начало координат, и масштабируем так, чтобы среднее квадратичное расстояние от точек до начала координат было 2 пикселя
- Применяем 8и точечный метод для вычисления F из нормализованных точек
- Приводим ранг матрицы F к 2
- Преобразуем матрицу к нормальным единицам: если T и T' нормализующие преобразования, тогда фундаментальная матрица в исходных координатах равна $T^T F T'$

-
- Ошибка $\sum_{i=1}^N (x_i^T F x'_i)^2$ - алгебраическая

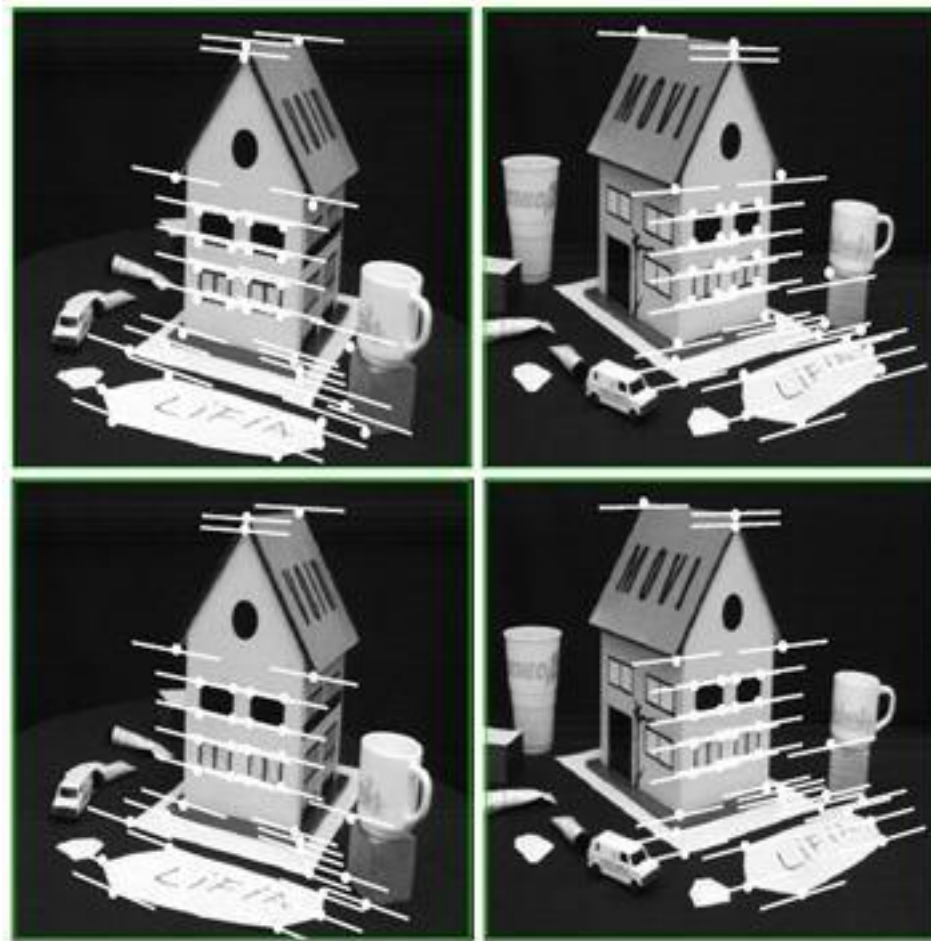
- Не имеет физического смысла

- «Оптимальная» ошибка:

$$\sum_{i=1}^N [d^2(x'_i, \hat{x}'_i) + d^2(x_i, \hat{x}_i)] , \text{ где } (\hat{x}'_i)^T F \hat{x}_i = 0$$

- Т.е. сумма квадратов расстояний от измеренных точек, до «идеальных»
- Требуется нелинейная оптимизация

Сравнение алгоритмов



	8-point	Normalized 8-point	Nonlinear least squares
Av. Dist. 1	2.33 pixels	0.92 pixel	0.86 pixel
Av. Dist. 2	2.18 pixels	0.85 pixel	0.80 pixel

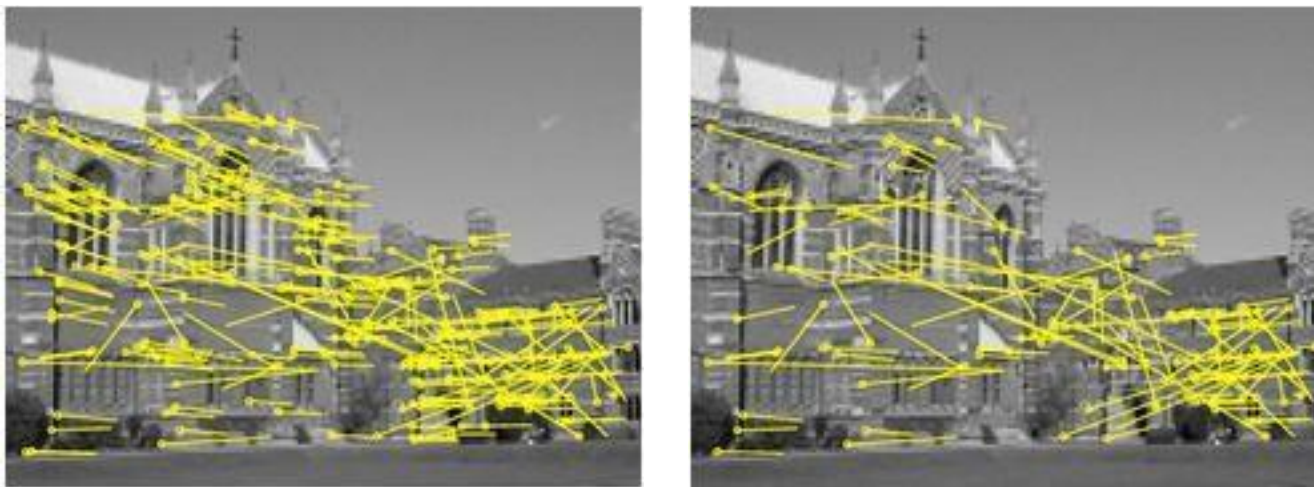
Если данные зашумлены?

- В соответствиях могут быть ошибки!
 - Ложные соответствия
- Нужно использовать робастные методы
- Обычно используют метод RANSAC с ошибкой:

$$\sum_{i=1}^N \left[d^2(x'_i, Fx_i) + d^2(x_i, F^T \hat{x}_i) \right]$$

- Затем уточняют по всем найденным корректным соответствиям

Зачем нужны?



- При сопоставлении локальных особенностей возникает много ошибок
- Можем робастно оценить фундаментальную матрицу по множеству соответствий
- Используем фундаментальную матрицу для фильтрации ложных соответствий
 - Если ошибка переноса/репроекции больше порога - выброс

$$\sum_{i=1}^N [d^2(x'_i, Fx_i) + d^2(x_i, F^T \hat{x}_i)]$$

Калибровка камер

- Вычисление фундаментальной матрицы еще называют «слабая калибровка»
- Если известны матрицы калибровки двух камер, тогда мы можем вычислить существенную матрицу: $E = K^T F K'$
- Существенная матрица дает относительный сдвиг и поворот камеры (внешнюю калибровку)

$$E = [t_{\times}]R$$

Зная существенную матрицу, можно для любой точки на изображении вычислить соответствующую эпполярную линию на другом изображении, и искать соответствие только на линии