

§ 8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Мнимой единицей называется символ, обозначаемый латинской буквой « i », для которого выполняется условие:

$$i^2 = -1. \quad (8.1)$$

Комплексным числом называется сумма вида

$$z = a + bi, \quad (8.2)$$

где a, b — вещественные числа. В частности, при $a = 0$ комплексное число $z = bi$ называется чисто мнимым, при $b = 0$ оно совпадает с вещественным числом a . Число a называется **вещественной частью** комплексного числа (8.2), а число b — его **мнимой частью**.

Всякое комплексное число (8.2) может быть изображено на плоскости $\mathbb{R}^2$ точкой с координатами (a, b) . При этом ось абсцисс (ox) называется **вещественной осью**, а ось ординат (oy) — **мнимой осью**.

Модулем комплексного числа (8.2) называется неотрицательное вещественное число

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (8.3)$$

Аргументом комплексного числа (8.2) называется угол в радианах между положительным направлением оси ox и радиус-вектором $\vec{r} = \{a, b\}$, измеренный в направлении против часовой стрелки. Аргумент обозначается как $\varphi = \arg(z)$ и принадлежит полуинтервалу $[0, 2\pi)$. Для нахождения аргумента в алгебраической форме находят угол φ из этого полуинтервала, удовлетворяющий системе уравнений

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}; \\ \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}. \end{cases} \quad (8.4)$$

Зная модуль и аргумент комплексного числа, можно преобразовать его следующим образом:

$$z = a + bi = |z| \cdot \left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|} i \right) = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)). \quad (8.5)$$

Запись вида (8.5) называется **тригонометрической формой комплексного числа** (8.2).

Вводя обозначение:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi), \quad (8.6)$$

получаем другую запись (8.7), называемую **показательной формой комплексного числа**:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}. \quad (8.7)$$

Пример 8.1. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i$, записать его в тригонометрической и показательной формах.

Имеем:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Теперь, зная модуль z , мы можем найти его аргумент согласно (8.4), (8.5):

$$z = -1 + \sqrt{3} \cdot i = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right),$$

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = -1/2 \\ \sin(\varphi) = \sqrt{3}/2 \\ \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Единственный угол φ , удовлетворяющий данной системе уравнений и лежащий на данном промежутке, равен $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому

тригонометрическая и показательная формы числа z будут иметь вид:

$$z = 2 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$z = 2 \cdot e^{\frac{2\pi}{3} i}.$$

Теперь рассмотрим действия, которые можно выполнять над комплексными числами.

Пусть имеются два комплексных числа:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i, \\ z_2 &= a_2 + b_2 i. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Сложение и вычитание. Чтобы найти сумму (разность) двух комплексных чисел (8.8), мы должны по отдельности сложить (вычесть) их вещественные и мнимые части:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i, \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Пример 8.2. Найти сумму и разность двух комплексных чисел: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$.

Имеем:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 + 3) + (2 - 4)i = 4 - 2i, \\ z_1 - z_2 &= (1 - 3) + (2 + 4)i = -3 + 6i. \end{aligned}$$

Умножение. Произведение комплексных чисел (8.3) находится из дистрибутивного закона и определения мнимой единицы (8.1). Имеем:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2.$$

Поскольку $i^2 = -1$, окончательно получаем:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i. \quad (8.10)$$

Пример 8.3. Найти произведение двух комплексных чисел: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$.

Имеем:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + 2i) \cdot (3 - 4i) = 3 + 6i - 4i - 8i^2 = \\ &= (3 + 8) + (6 - 4)i = 11 + 2i. \end{aligned}$$

Деление. Чтобы найти частное комплексных чисел z_1, z_2 , введем одно вспомогательное определение.

Комплексным числом, **сопряженным** к комплексному числу $z = a + bi$, называется комплексное число $\bar{z} = a - bi$.

Комплексное число $z = a + bi$ и сопряженное к нему комплексное число $\bar{z} = a - bi$ связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2a, \\ z \cdot \bar{z} &= |z|^2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Теперь, используя второе из соотношений (8.11), преобразуем частное $\frac{z_1}{z_2}$ путем домножения числителя и знаменателя дроби на множитель, сопряженный знаменателю:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 a_2 i - a_1 b_2 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.\end{aligned}$$

Пример 8.4. Найти частное двух комплексных чисел: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$.

Имеем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i.$$

Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

Пусть у нас есть два комплексных числа z_1, z_2 , записанные в показательной форме:

$$z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}. \quad (8.12)$$

Тогда имеют место следующие **правила**:

1. При перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \\ z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).\end{aligned} \quad (8.13)$$

2. При делении двух комплексных чисел модуль первого из них делится на модуль второго, а из аргумента первого вычитается аргумент второго.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned} \quad (8.14)$$

3. При возведении комплексного числа z в степень n его модуль возводится в степень n , а аргумент умножается на n .

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi},$$

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)). \quad (8.15)$$

Последнее равенство носит название «**формула Муавра**».

Пример 8.5. Выполнить умножение и деление двух комплексных чисел $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$ в тригонометрической (показательной) форме.

Для начала найдем модуль и аргумент комплексных чисел z_1, z_2 :

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i},$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$

Теперь найдем произведение и частное z_1, z_2 согласно (8.13) и (8.14):

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}i} = 2 \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right)i} = \\ &= 2 \cdot e^{2\pi i} = 2 \cdot (\cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi)) = 2, \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}i}} = e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right)i} = e^{-\frac{6\pi}{4}i} = e^{-\frac{3\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

В последнем равенстве с экспонентой мы прибавили к углу $-\frac{3\pi}{2}$

угол 2π (полный круг), чтобы аргумент попал в нужный диапазон от 0 до 2π .

Пример 8.6. Используя формулу Муавра, вычислить $(1 + i)^{10}$.

Рассмотрим комплексное число $z = 1 + i$ и найдем z^{10} . Из примера 8.5 нам уже известно, что

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Поэтому согласно формуле Муавра (8.15):

$$\begin{aligned} z^{10} &= (1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} \cdot e^{\frac{10\pi}{4}i} = 2^5 \cdot e^{\frac{5\pi}{2}i} = \\ &= 32 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = 32 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) = 32i. \end{aligned}$$

В последнем равенстве с экспонентой мы отняли 2π от угла $\frac{5\pi}{2}$, чтобы аргумент попал в нужный диапазон от 0 до 2π .

Корнем n -й степени из комплексного числа z называется такое число z_1 , что $(z_1)^n = z$. Если некоторое комплексное число $z \neq 0$ имеет модуль $|z|$ и аргумент φ , то оно имеет ровно n различных комплексных корней n -й степени $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, которые находятся по формуле:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}i}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8.16)$$

Пример 8.7. Найти все корни третьей степени из числа $z = 2i$.

Поскольку для $z = 2i$, $\varphi = \arg(z) = \frac{\pi}{2}$ и $|z| = 2$, то согласно (8.16)

имеем при $k = 0, 1, 2$:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3}i} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{6}i} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \\ &= \sqrt[3]{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}i} = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{9\pi}{6}i} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -\sqrt[3]{2} \cdot i.$$

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с дискриминантом $D = b^2 - 4ac < 0$ решается по той же формуле, как обычное квадратное уравнение. При этом $\sqrt{D} = \sqrt{-|D|} = \sqrt{i^2 D} = \pm i \sqrt{|D|}$. Таким образом,

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}. \quad (8.17)$$

Пример 8.8. Решить уравнение $z^2 + 4z + 5 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } D &= 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 16 - 25 = -9 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \\ &= -2 \pm i. \end{aligned}$$

Задачи

Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:

8.1. $(3 + 5i) + (7 - 2i)$.

8.2. $(3 - 2i) - (5 + i)$.

8.3. $(2 + 3i)(5 - 7i)$.

8.4. $(3 + 2i)(-5i)$.

8.5. $(2 + 3i)2$.

8.6. $(5 - i)3$.

8.7. $\frac{2+3i}{5-7i}$.

8.8. $\frac{1-i}{1+i}$.

8.9. $\frac{(2+3i)-(5+7i)}{2+3i}$.

8.10. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{12} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}$.

Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах:

8.11. $z = 5i$.

8.12. $z = 1 + i$.

8.13. $z = -6$.

8.14. $z = -2 - 2i$.

8.15. $z = -3\sqrt{3} + 3i$.

Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах:

$$8.16. z = e^{\frac{5\pi}{4}i}.$$

$$8.17. z = 4e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

$$8.18. z = 5e^{\frac{7\pi}{6}i}.$$

$$8.19. z = -2e^{\frac{11\pi}{6}i}.$$

$$8.20. z = \left(e^{\frac{\pi}{4}i} + e^{\frac{\pi}{4}i} \right)^2.$$

Решить уравнения в комплексных числах:

$$8.21. z^2 + 4 = 0.$$

$$8.22. z^2 + 2z + 2 = 0.$$

$$8.23. z^2 - 4z + 13 = 0.$$

$$8.24. z^2 + 3z + 4 = 0.$$

$$8.25. 4z^2 - 20z + 26 = 0.$$

$$8.26. 25z^2 + 10z + 10 = 0.$$

$$8.27. z^4 + 4z^2 + 5 = 0.$$

$$8.28. z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0.$$

$$8.29. z^4 + 2z^2 + 1 = 0.$$

$$8.30. z^3 - 8 = 0.$$

Вычислить:

$$8.31. \sqrt[3]{1-i}.$$

$$8.32. \sqrt[4]{-16}.$$

$$8.33. \sqrt[3]{2-2i}.$$

$$8.34. \sqrt[4]{i}.$$

$$8.35. \sqrt[4]{-2-2\sqrt{3}i}.$$

$$8.36. \sqrt[5]{3-4i}.$$

$$8.37. (3-3i)^5.$$

$$8.38. (\sqrt{3}+i)^{10}.$$