

Программа экзамена по А и Г, группы. 3351 - 54. осень 2023.

1. Измерение углов в радианах. Тригонометрические функции. Полярный радиус и полярный угол. Декартовы и полярные координаты, формулы перехода туда и обратно.
2. Комплексное умножение векторов. Понятие мнимой единицы. Тождество $i^2 = -1$. Согласование с обычным умножением для вещественных чисел. Комплексные числа (КЧ): тригонометрическая и алгебраическая форма. Действия над КЧ.
3. Понятие комплексной степени. Показательная форма комплексного числа. Действие в показательной форме. Основная теорема алгебры. Сопряженные корни многочлена с вещественными коэффициентами. Решение квадратных уравнений с вещественными коэффициентами и мнимыми коэффициентами. Извлечение квадратного корня из КЧ. Извлечение корня n -й степени из КЧ.
4. Понятие прямоугольной матрицы. Нумерация элементов. Вещественные и комплексные матрицы. Квадратные матрицы. Нулевая и единичная матрицы. Виды диагоналей. Транспонирование матриц. Сложение и вычитание матриц. Умножение их на число. Согласование размерностей. Умножение матриц между собой. Примеры. Свойства операций и транспонирования.
5. Связь транспонирования матриц с действиями над матрицами; понятие перестановки; чётные и нечётные перестановки; два подхода к определению детерминанта (через перестановки и миноры); разбор их эквивалентности на примере матриц 2×2 и 3×3 . Определитель в общем случае. Вырожденная и невырожденная матрица. Свойства определителя: опр. транспонированной матрицы, равнозначность свойств для строк и столбцов, вынесение сомножителя, перестановка строк, определитель с двумя одинаковыми строками, с нулевой строкой, добавление произведения, определитель треугольной и единичной матрицы, определитель произведения матриц. Понятие обратной матрицы.
6. Понятие матричного уравнения. Понятие левой и правой обратной матрицы. Существование, равенство, единственность. Нахождение обратной матрицы методом алгебраических дополнений. Три вида элементарных преобразований. Матрицы элементарных преобразований и их влияние на исходную матрицу. Использование элементарных преобразований для нахождения обратной матрицы и решения матричных уравнений.
7. Правая и левая обратная матрица: задание в виде уравнений, нахождение методом элементарных преобразований. Перемножение определителей и обратная матрица. Решение матричных уравнений с неединичной правой частью. Понятие линейной комбинации, линейной оболочки и линейной независимости. Базис и размерность. Ранг матрицы.
8. Два определения базиса и их эквивалентность. Размерность. Стандартный базис $\{i, j, k\}$. Базис из неколлинеарных и некомпланарных векторов. Элементарные преобразования и линейная оболочка векторов. Нахождение базиса линейной оболочки. Линейная независимость строк ступенчатой матрицы. Ранг матрицы: определение, нахождение.
9. Линейное пространство в общем случае. Обобщенное понятие "вектора". Примеры линейной независимости и базиса для функций. Координаты вектора в базисе.
10. Системы линейных уравнений (СЛУ). Определение, 4 вида записи (в исходной форме, в виде произведения, в виде расширенной матрицы, линейной комбинации столбцов), совместные и несовместные системы, частное и общее решения, три альтернативы, примеры. Однородные и неоднородные СЛУ. Выражение существования решения в терминах линейной оболочки. Теорема Кронекера - Капелли.
11. Влияние элементарных преобразований на СЛУ. Решение СЛУ методом элементарных преобразований. Свободные и связанные переменные. Связь между количеством свободных

переменных и рангом матрицы системы. Структура решения однородной и неоднородной системы. Решение СЛУ методом Крамера.

12. Скалярное произведение, его определение и основные свойства: линейность, симметричность, неотрицательность. Выражение скалярного произведения в координатах и через длины векторов и угол между ними. Связь с ортогональностью векторов. Неравенство Коши-Буняковского.

13. Понятие левой и правой тройки. Векторное произведение, его определение и основные свойства: линейность, антикоммутативность. Таблица умножения ортов. Выражение в координатах в виде определителя матрицы. Связь равенства нулю с коллинеарностью. Связь с площадью треугольника и параллелограмма.

14. Смешанное произведение векторов, его определение и основные свойства: линейность, антикоммутативность, связь равенства нулю с компланарностью. Выражение в виде определителя. Связь с объёмом параллелепипеда и тетраэдра.

15. Прямая в пространстве: начальная точка и направляющий вектор. Параметрическое и каноническое уравнения прямой. Взаимное расположение прямых в пространстве: параллельность, пересечение и скрещивание.

16. Плоскость в пространстве: начальная точка и нормальный вектор. Каноническое уравнение плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей: параллельность и пересечение. Прямая в пространстве как пересечение двух плоскостей. Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые. Угол между прямыми, между двумя плоскостями и между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до прямой и от точки до плоскости.

17. Уравнение множества на плоскости. Примеры. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Вырожденные случаи. Определение вида кривой второго порядка по её уравнению.

Ссылки:

1. Дмитрий Письменный. Конспект лекций по высшей математике.
2. Ефимов, Демидович. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Часть 1: линейная алгебра и основы математического анализа.
3. Лисичкин, Соловейчик. Математика в задачах с решениями.
4. Сайт <http://mathprofi.ru>