

Общие признаки делимости

Н.А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

2021

Делимость целых чисел и ее свойства

Под числами будем понимать целые числа.

Определение.

Число n делится на число a (или a делит n) если существует число s такое, что $n = sa$.

Для этого факта используем обозначение: n/a .

Свойства.

- 1) $n/a \Leftrightarrow (-n)/a$;
- 2) $n/a, m/a \Rightarrow (n + m)/a$;
- 3) $(n + m)/a, n/a \Rightarrow m/a$;
- 4) $n/a \Rightarrow (nm)/a$;
- 5) если m не делится на простое число p , то выполняется:
 $(nm)/p \Rightarrow n/p$;

1-й признак делимости Рачинского (1900)

Теорема 1. Пусть p простое число такое, что $10^s < p \leq n$ и $p = 10^s a + b$, $n = 10^s m + k$, где $0 \leq b, k < 10^s$ и $1 \leq s$. Тогда выполняется:

$$n/p \Leftrightarrow (mb - ka)/p.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} n/p &\Leftrightarrow (10^s a + b)/p, (10^s m + k)/p \Leftrightarrow (10^s a + b)k/p, (10^s m + k)b/p \\ &\Leftrightarrow 10^s(mb - ka)/p, (10^s ak + bk)/p \Leftrightarrow (mb - ka)/p. \end{aligned}$$

Так как $(mb - ka) < n$, то при рекурсивном применении этого признака обязательно дойдем до числа не большего чем p . Если получится 0 или p , то n делится на p , иначе не делится.

2-й признак делимости Рачинского (1900)

Теорема 2. Пусть p простое число такое, что $11 \leq p \leq n$ и $p = 10a + b$, $n = 10m + k$, где $0 \leq b, k \leq 9$. Тогда выполняется:

$$n/p \Leftrightarrow (m + kq)/p$$

$$\text{где } q = \frac{pb^* + 1}{10}, \quad b^* = \begin{cases} b, & \text{если } b \in \{3, 7\}; \\ 10 - b, & \text{если } b \in \{1, 9\}. \end{cases}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} n/p &\Leftrightarrow (pb^*k)/p, (10m + k)/p \Leftrightarrow (pb^*k + 10m + k)/p \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10 \left(\frac{pb^* + 1}{10}k + m \right) / p \Leftrightarrow (m + kq)/p. \end{aligned}$$

3-й признак делимости Рачинского (1900)

Теорема 3. Пусть p простое число такое, что $11 \leq p \leq n$ и $p = 10a + b$, $n = 10m + k$, где $0 \leq b, k \leq 9$. Тогда выполняется:

$$n/p \Leftrightarrow (m - kq^*)/p$$

где $q^* = |p - q|$ и q определяется как в теореме 2.

Доказательство.

$$\begin{aligned} n/p &\Leftrightarrow (kq + m)/p, (kp)/p \Leftrightarrow (kp - kq - m)/p \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (k(p - q) - m)/p \Leftrightarrow (kq^* - m)/p \Leftrightarrow (m - kq^*)/p. \end{aligned}$$

Если при рекурсивном применении 2-го и 3-го признаков Рачинского получаем число не меньшее, чем на предыдущем шаге, с того шага нужно применять другой признак.

Примеры применения признаков Рачинского

Дано $p = 73$. Тогда $a = 7$, $b = 3$.

1-й признак

Пусть $n = 4088$.

$$1) s = 1, m = 408, k = 8.$$

$$mb - ka = 408 \cdot 3 - 8 \cdot 7 = 1168$$

$$2) s = 1, m = 116, k = 8.$$

$$mb - ka = 116 \cdot 3 - 8 \cdot 7 = 292$$

$$3) s = 1, m = 29, k = 2.$$

$$mb - ka = 29 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 73$$

Ответ: 4088 делится на 73.

Примеры применения признаков Рачинского

Дано $p = 73$. Тогда $a = 7$, $b = 3$, $q = \frac{pb^* + 1}{10} = \frac{73 \cdot 3 + 1}{10} = 22$.

2-й признак

Пусть $n = 4088$.

1) $m = 408$, $k = 8$.

$$m + kq = 408 + 8 \cdot 22 = 584$$

2) $m = 58$, $k = 4$.

$$m + kq = 58 + 4 \cdot 22 = 146$$

3) $m = 14$, $k = 6$.

$$m + kq = 14 + 6 \cdot 22 = 146$$

Ответ: $4088/73 \Leftrightarrow 146/73$.

Примеры применения признаков Рачинского

Дано $p = 73$. Тогда

$$a = 7, b = 3, q = 22, q^* = |p - q| = |73 - 22| = 51.$$

3-й признак

Пусть $n = 4088$.

$$1) m = 408, k = 8.$$

$$m - kq^* = 408 - 8 \cdot 51 = 0$$

Ответ: 4088 делится на 73.

Признак делимости Паскаля (1623-1662)

s -степенной вычет 10 по модулю d ($s = 0, 1, \dots$) это остаток r_s от деления 10^s на d : $10^s = u_s d + r_s$, где $0 \leq r_s < d$.

Теорема 4. Пусть $n = 10^k n_k + \dots + 10^0 n_0$, где $0 \leq n_s < 10$. Тогда выполняется:

$$n/d \Leftrightarrow r/d$$

где $r = r_k n_k + \dots + r_0 n_0$ и r_s есть s -степенные вычеты 10 по модулю d .

Доказательство.

$$n/d \Leftrightarrow (10^k n_k + \dots + 10^0 n_0)/d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((u_k n_k + \dots + u_0 n_0)d + (r_k n_k + \dots + r_0 n_0))/d \Leftrightarrow r/d.$$

Пример применения признака Паскаля

Так как $r_k n_k + \dots + r_0 n_0 < n$, то при рекурсивном применении этого признака обязательно дойдем до числа с количеством цифр не больше чем у d , проверку делимости которого просто установить другим методом.

Дано $d = 73$. Тогда s -степенные вычеты 10 по модулю 73:
 $r_0 = 1, r_1 = 10, r_2 = 27, r_3 = 51, r_4 = 72, r_5 = 63$.

Пусть $n = 4088$.

$$1) r = 51 \cdot 4 + 27 \cdot 0 + 10 \cdot 8 + 1 \cdot 8 = 292$$

$$2) r = 27 \cdot 2 + 10 \cdot 9 + 1 \cdot 2 = 146$$

$$3) r = 27 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 73$$

Ответ: 4088 делится на 73.

Признак делимости Лукаса (E.Lucas, 1891)

Теорема 5. Пусть $n = 10^k n_k + \dots + 10^0 n_0$, где $0 \leq n_s < 10$.
Тогда выполняется:

$$n/d \Leftrightarrow (r_s a + b)/d$$

где $a = 10^{k-s} n_k + \dots + 10^0 n_s$, $b = 10^{s-1} n_{s-1} + \dots + 10^0 n_0$,
 r_s – s -степенной вычет 10 по модулю d , $s < k$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} n/d &\Leftrightarrow ((10^k n_k + \dots + 10^s n_s) + (10^{s-1} n_{s-1} + \dots + 10^0 n_0))/d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (10^s (10^{k-s} n_k + \dots + 10^0 n_s) + (10^{s-1} n_{s-1} + \dots + 10^0 n_0))/d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((u_s d + r_s)(10^{k-s} n_k + \dots + 10^0 n_s) + (10^{s-1} n_{s-1} + \dots + 10^0 n_0))/d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (u_s d a + (r_s a + b))/d \Leftrightarrow (r_s a + b)/d. \end{aligned}$$

Пример применения признака Лукаса

При рекурсивном применении этого признака всегда можно взять s такое, что обязательно дойдем до числа с количеством цифр не больше чем у d , проверку делимости которого просто установить другим методом.

Дано $d = 73$.

Пусть $n = 4088$.

$$1) a = 40, b = 88, r_2 = 27$$

$$r_2 a + b = 27 \cdot 40 + 88 = 1168$$

$$2) a = 1, b = 168, r_3 = 51$$

$$r_3 a + b = 51 \cdot 1 + 168 = 219$$

$$3) a = 2, b = 19, r_2 = 27$$

$$r_2 a + b = 27 \cdot 2 + 19 = 73$$

Ответ: 4088 делится на 73.