

Конденсационные методы вычисления определителей

Н.А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

2021

Определения и обозначения

Определение. Пусть A квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Определитель n -го порядка матрицы A есть следующая сумма:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum \varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n}$$

где $\varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ четная перестановка;} \\ -1, & \text{если } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ нечетная перестановка.} \end{cases}$

Метод конденсации вычисления определителей

Пусть дан определитель 3-го порядка и $a_{22} \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Тогда его можно вычислить следующим образом:

$$b_{1,1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \quad b_{1,2} = \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix},$$
$$b_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}, \quad b_{2,2} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}.$$

В итоге получаем:

$$|A| = \frac{1}{a_{2,2}} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix}$$

Метод конденсации Чию (F.Chio, 1853)

Теорема 1. Пусть $A = (a_{ij})$ квадратная матрица n -го порядка, $a_{rs} \neq 0$ и матрица $B = (b_{ij})$ определена по A так:

$$b_{i,j} = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_{i,j} & a_{i,s} \\ a_{r,j} & a_{r,s} \end{vmatrix}, & \text{если } 1 \leq i \leq r-1, 1 \leq j \leq s-1; \\ \begin{vmatrix} a_{i,s} & a_{i,j} \\ a_{r,s} & a_{r,j} \end{vmatrix}, & \text{если } 1 \leq i \leq r-1, s+1 \leq j \leq n; \\ \begin{vmatrix} a_{r,j} & a_{r,s} \\ a_{i,j} & a_{i,s} \end{vmatrix}, & \text{если } r+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq s-1; \\ \begin{vmatrix} a_{r,s} & a_{r,j} \\ a_{i,s} & a_{i,j} \end{vmatrix}, & \text{если } r+1 \leq i \leq n, s+1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

$$\text{Тогда} \quad |A| = \frac{1}{a_{r,s}^{n-2}} |B|.$$

Пример вычисления определителя методом Чио

Вычислим определитель 5-го порядка по элементу $a_{3,1}$.

$$\begin{aligned}|A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1^3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 & 6 & -7 \\ -2 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 9 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{(-1)^2} \cdot \begin{vmatrix} -10 & 6 & -13 \\ 10 & -4 & 7 \\ \boxed{-1} & -9 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-1)^1} \cdot \begin{vmatrix} 96 & -13 \\ -94 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= -(96 \cdot 7 - (-94) \cdot (-13)) = 550.\end{aligned}$$

Обобщенный метод конденсации Чию

Определение. Минор $A_{r_1, \dots, r_k}^{s_1, \dots, s_k}$ матрицы $A = (a_{ij})$ это определитель матрицы образованной элементами матрицы A , стоящими на пересечении $r_1, \dots, r_k$ строк и $s_1, \dots, s_k$ столбцов.

Теорема 2. Пусть $A = (a_{ij})$ квадратная матрица n -го порядка, минор $A_{r_1, \dots, r_k}^{s_1, \dots, s_k} \neq 0$ и матрица $(n-k)$ порядка B определена так:

$$B = \left(A_{r_1, \dots, i, \dots, r_k}^{s_1, \dots, j, \dots, s_k} \right),$$

где элементы B упорядоченны как миноры матрицы A .

$$\text{Тогда} \quad |A| = \frac{1}{(A_{r_1, \dots, r_k}^{s_1, \dots, s_k})^{n-k-1}} |B|.$$

Примеры вычисления определителя методом Чоу

Вычислим $|A|$ по минору $A_{2,3}^{1,3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ \boxed{0} & 2 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\left(A_{2,3}^{1,3}\right)^2} \cdot \begin{vmatrix} A_{1,2,3}^{1,2,3} & A_{1,2,3}^{1,3,4} & A_{1,2,3}^{1,3,5} \\ A_{2,3,4}^{1,2,3} & A_{2,3,4}^{1,3,4} & A_{2,3,4}^{1,3,5} \\ A_{2,3,5}^{1,2,3} & A_{2,3,5}^{1,3,4} & A_{2,3,5}^{1,3,5} \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{(-1)^2} \cdot \begin{vmatrix} -10 & 6 & -13 \\ 10 & -4 & 7 \\ -1 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 550.$$

Примеры вычисления определителя методом Чю

Вычислим $|A|$ по по минору $A_{2,3,5}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{1} & 0 & -2 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ \boxed{-3} & \boxed{-3} & \boxed{2} & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\left(A_{2,3,5}^{1,2,3}\right)^1} \cdot \begin{vmatrix} A_{1,2,3,4}^{1,2,3,5} & A_{1,2,3,5}^{1,2,3,5} \\ A_{2,3,4,5}^{1,2,3,4} & A_{2,3,4,5}^{1,2,3,5} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(-1)^1} \cdot \begin{vmatrix} 96 & -13 \\ -94 & 7 \end{vmatrix} = 550.$$

Метод конденсации Доджсона (C.L.Dodgson, 1866), (псевдоним Льюис Кэрролл)

Теорема 3. Пусть $A = (a_{i,j})$ квадратная матрица n -го порядка. Определим последовательность матриц $A_1, A_2, \dots, A_q, \dots, A_n$ следующим образом:

$$A_1 = (a_{i,j}^1), \text{ где } a_{i,j}^1 = a_{i,j}, \text{ при } 1 \leq i, j \leq n;$$

$$A_2 = (a_{i,j}^2), \text{ где } a_{i,j}^2 = \begin{vmatrix} a_{i,j}^1 & a_{i,j+1}^1 \\ a_{i+1,j}^1 & a_{i+1,j+1}^1 \end{vmatrix}, \text{ при } 1 \leq i, j \leq n-1;$$

$$A_q = (a_{i,j}^q), \text{ где } a_{i,j}^q = \frac{1}{a_{i+1,j+1}^{q-2}} \cdot \begin{vmatrix} a_{i,j}^{q-1} & a_{i,j+1}^{q-1} \\ a_{i+1,j}^{q-1} & a_{i+1,j+1}^{q-1} \end{vmatrix},$$

при $1 \leq i, j \leq n - q + 1$, для $3 \leq q \leq n$.

Тогда $|A| = a_{1,1}^n$.

Примеры вычисления определителей методом Доджсона

Вычислим определитель матрицы A_1 .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 2 & -2 \\ -13 & -4 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 8 & -4 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow A_5 = (5).$$

Получили $|A_1| = 5$.

Примеры вычисления определителей методом Доджсона

Вычислим определитель матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Для того, что бы избежать} \\ \text{деления на 0 выполним} \\ \text{перестановку 4-й и 5-й строк,} \\ \text{переставку 4-го и 5-го столбца,} \\ \text{к 3-й строке прибавим 1-ю строку.} \end{array} \right\}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -9 & -4 \\ -6 & 4 & 7 & 0 \\ -3 & 13 & 4 & 3 \\ -6 & 9 & 12 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} -10 & -6 & -14 \\ -33 & -25 & 21 \\ -17 & 60 & -36 \end{pmatrix} \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 13 & -68 \\ -185 & -90 \end{pmatrix} \Rightarrow A_5 = (550).$$