

Сложность алгоритмов. Теорема о рекуррентном неравенстве.

Н.А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

2021

Асимптотические обозначения

Определение 1. Функция $f(n)$ принадлежит множеству $O(g(n))$ если существует действительное число $c > 0$ и натуральное число n_0 такое, что $f(n) \leq cg(n)$ для всех $n \geq n_0$.
Записывается так: $f(n) \in O(g(n))$ или $f(n) = O(g(n))$.

Определение 2. Функция $f(n)$ принадлежит множеству $\Omega(g(n))$ если существует действительное число $c > 0$ и натуральное число n_0 такое, что $f(n) \geq cg(n)$ для всех $n \geq n_0$.
Записывается так: $f(n) \in \Omega(g(n))$ или $f(n) = \Omega(g(n))$.

Определение 3. Функция $f(n)$ принадлежит множеству $\Theta(g(n))$ если $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) = \Omega(g(n))$.
Записывается так: $f(n) \in \Theta(g(n))$ или $f(n) = \Theta(g(n))$.

Основные верхние асимптотические оценки

- $O(1)$ – константная;
- $O(\log n)$ – логарифмическая;
- $O(n)$ – линейная;
- $O(n \log n)$ – квазилинейная;
- $O(n^2)$ – квадратичная;
- $O(n^3)$ – кубическая;
- $O(2^n)$ – экспоненциальная;
- $O(n!)$ – факториальная.

Теорема о рекуррентном неравенстве

Теорема. Пусть $L(n)$ – функция натурального аргумента, удовлетворяющая рекуррентному неравенству

$$L(n) \leq aL\left(\frac{n}{c}\right) + O(n^\alpha),$$

для $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$, при всех $n = c^k$, где $k \in \mathbb{N}$. Пусть при этом $L(n)$ монотонно не убывает на всех отрезках $[c^k + 1, c^{k+1}]$. Тогда выполняется

$$L(n) = \begin{cases} O(n^\alpha), & \text{если } a < c^\alpha; \\ O(n^\alpha \log n), & \text{если } a = c^\alpha; \\ O(n^{\log_c a}), & \text{если } a > c^\alpha. \end{cases}$$

Теорема о рекуррентном неравенстве

Доказательство. Существуют $k_0 \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ такие, что для всех $n = c^k \geq n_0 = c^{k_0}$ выполняется неравенство

$$L(n) \leq aL\left(\frac{n}{c}\right) + bn^\alpha.$$

Тогда применяем $(k - k_0)$ раз это неравенство, получаем

$$\begin{aligned} L(n) &\leq aL\left(\frac{n}{c}\right) + bn^\alpha \leq a\left(aL\left(\frac{n}{c^2}\right) + b\left(\frac{n}{c}\right)^\alpha\right) + bn^\alpha = \\ &= bn^\alpha + ab\left(\frac{n}{c}\right)^\alpha + a^2L\left(\frac{n}{c^2}\right) \leq bn^\alpha + bn^\alpha\left(\frac{a}{c^\alpha}\right) + a^2\left(aL\left(\frac{n}{c^3}\right) + b\left(\frac{n}{c^2}\right)^\alpha\right) \\ &\leq \dots \leq bn^\alpha + bn^\alpha\left(\frac{a}{c^\alpha}\right) + \dots + bn^\alpha\left(\frac{a}{c^\alpha}\right)^{k-1} + a^kL\left(\frac{n}{c^{k-k_0}}\right) \end{aligned}$$

Пусть $d = \max(b, L(n_0))$. Так как $n = c^k$, то

$$\begin{aligned} L(n) &\leq dn^\alpha \left(1 + \left(\frac{a}{c^\alpha}\right) + \left(\frac{a}{c^\alpha}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{c^\alpha}\right)^{k-1}\right) + da^k = \\ &= dn^\alpha \left(1 + \left(\frac{a}{c^\alpha}\right) + \left(\frac{a}{c^\alpha}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{c^\alpha}\right)^k\right). \end{aligned}$$

Теорема о рекуррентном неравенстве

Получили неравенство

$$L(n) \leq dn^{\alpha} \left(1 + \left(\frac{a}{c^{\alpha}} \right) + \left(\frac{a}{c^{\alpha}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{c^{\alpha}} \right)^k \right).$$

Рассмотрим 3 случая, где t – некоторая константа.

1) $a < c^{\alpha} \Rightarrow L(n) \leq dn^{\alpha} t = O(n^{\alpha});$

2) $a = c^{\alpha} \Rightarrow L(n) \leq dn^{\alpha} (k + 1) = dn^{\alpha} (1 + \log_c n) = O(n^{\alpha} \log n);$

3) $a > c^{\alpha} \Rightarrow L(n) \leq dn^{\alpha} \left(\frac{a}{c^{\alpha}} \right)^k \left(1 + \left(\frac{c^{\alpha}}{a} \right) + \dots + \left(\frac{c^{\alpha}}{a} \right)^k \right) \leq$
 $\leq da^k t = O(a^{\log_c n}) = O(n^{\log_c a}).$

Теорема о рекуррентном неравенстве

Теперь пусть любое натуральное число $n \geq n_0 = c^{k_0}$. Тогда найдется натуральное число $k \geq k_0$ такое, что $c^k < n \leq c^{k+1}$. Так как $L(n)$ неубывающая функция на отрезке $[c^k + 1, c^{k+1}]$, то для трех рассмотренных случаев верны следующие рассуждения, где t – некоторая константа.

$$1) L(n) \leq L(c^{k+1}) \leq t(c^{k+1})^\alpha = tc^\alpha (c^k)^\alpha \leq tc^\alpha n^\alpha = O(n^\alpha);$$

$$2) L(n) \leq L(c^{k+1}) \leq tc^{(k+1)\alpha} \log_c(c^{k+1}) \leq tc^\alpha (c^k)^\alpha 2k \leq \\ \leq 2tc^\alpha n^\alpha \log_c n = O(n^\alpha \log n);$$

$$3) L(n) \leq L(c^{k+1}) \leq t(c^{k+1})^{\log_c a} = tc^{\log_c a} (c^k)^{\log_c a} \leq \\ \leq tan^{\log_c a} = O(n^{\log_c a}).$$