

Умножение чисел. Метод «разделяй и властвуй»

Н.А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

2021

Методическое умножение (подвижного метода Фурье)

Будем вычислять произведения n -разрядных натуральных чисел. Сложность алгоритмов умножения измеряем числом арифметических операций с одноразрядными числами.

Описание алгоритма. Одно число записывается в обратном порядке, так что под его наибольшим разрядом записывается наименьший разряд второго числа. На каждом шаге верхнее число двигается с права налево (или нижнее число с лева направо) и разряды находящиеся друг под другом перемножаются, складываются и заносятся в соответствующий разряд искомого произведения.

Покажем на примере $22 \cdot 331$.

$$\begin{array}{r} 133 \\ 22 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 133 \\ 22 \\ 82 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 133 \\ 22 \\ (1)282 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 133 \\ 22 \\ 7282 \\ \hline \end{array}$$

Замечание. Очевидно, что сложность этого алгоритма, как и обычное умножение "в столбик", имеет оценку $O(n^2)$.

Сокращенное умножение

Покажем на примере $22 \cdot 331$.

$$\begin{array}{r} 331 \\ 022 \\ \hline 000602 \\ 0608 \\ 06 \\ \hline 7282 \end{array}$$

Замечание. Оценка сложности этого алгоритма, очевидно, так же равна $O(n^2)$.

Русское умножение – метод Аль-Хорезми

Покажем на примере $22 \cdot 331 = 7282$.

22		331
11		662
5		1324
2		2648
1		5296
		7282

Корректность алгоритма следует из формул:

$$a \cdot b = \begin{cases} \frac{a}{2} \cdot 2b, & \text{если } a \text{ четное;} \\ \frac{a-1}{2} \cdot 2b + b, & \text{если } a \text{ нечетное;} \end{cases}$$

Умножение натуральных чисел. Метод декомпозиции

Вычислим произведение двух натуральных $(n + 1)$ -разрядных чисел вычислением n -разрядных чисел.

Теорема. Произведение находится по следующей формуле. Пусть $a = a_1 10^n + a_2$, $b = b_1 10^n + b_2$, где $a_1, b_1 \leq 9$, $a_2, b_2 < 10^n$. Тогда

$$ab = a_1 b_1 10^{2n} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) 10^n + a_2 b_2.$$

Оценкой сложности: $L(n + 1) \leq L(n) + O(n)$.

Доказательство. Корректность очевидна, а оценка сложности следует из того, что умножение n -разрядного числа на одноразрядное имеет сложность $O(n)$.

Замечание. Рекурсивный алгоритм по этой формуле, как и другие выше рассмотренные алгоритмы, имеет оценку сложности $O(n^2)$.

Метод «разделяй и властвуй»: алгоритм Карацубы

Вычисляем произведение двух натуральных n -разрядных чисел. Для этого разобьем каждое число на две части. В случае нечетного числа разрядов добавим еще один разряд с нулевым коэффициентом. Это в силу предыдущей теоремы не повлияет на асимптотическую оценку алгоритма.

Теорема. Произведение находится по следующей формуле (А.А. Карацуба, 1962).

Пусть $a = a_1 10^{\frac{n}{2}} + a_2$, $b = b_1 10^{\frac{n}{2}} + b_2$, где $a_2, b_2 < 10^{\frac{n}{2}}$.

Тогда

$$ab = a_1 b_1 10^n + ((a_1 + a_2)(b_1 + b_2) - a_1 b_1 - a_2 b_2) 10^{\frac{n}{2}} + a_2 b_2.$$

Асимптотическая оценка сложности рекурсивного алгоритма:

$$L(n) = O(n^{\log_2 3}).$$

Метод «разделяй и властвуй»: алгоритм Карацубы

Доказательство. Корректность алгоритма:

$$ab = (a_1 10^{\frac{n}{2}} + a_2)(b_1 10^{\frac{n}{2}} + b_2) = a_1 b_1 10^n + (a_1 b_2 + a_2 b_1) 10^{\frac{n}{2}} + a_2 b_2 = a_1 b_1 10^n + ((a_1 + a_2)(b_1 + b_2) - a_1 b_1 - a_2 b_2) 10^{\frac{n}{2}} + a_2 b_2.$$

Оценим сложность.

$$L(n) \leq 2 \cdot L\left(\frac{n}{2}\right) + L\left(\frac{n}{2} + 1\right) + O(n) \leq 3 \cdot L\left(\frac{n}{2}\right) + O(n).$$

Так как $a = 3, c = 2, \alpha = 1$, то $a > c^\alpha$ и по теореме о рекуррентном неравенстве получается

$$L(n) = O(n^{\log_2 3}).$$

Замечание. Отметим, что $n^{\log_2 3} \approx n^{1,58}$. Алгоритм Карацубы эффективнее умножения "в столбик" обычно при $n > 600$. Известен алгоритм умножения с оценкой $O(n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n)$.

Пример умножения чисел алгоритмом Карацубы

Вычислим произведение

$$\begin{aligned} 331 \cdot 22 &= (3 \cdot 10^2 + 31)(0 \cdot 10^2 + 22) = \\ &= 3 \cdot 0 \cdot 10^4 + (34 \cdot 22 - 3 \cdot 0 - 31 \cdot 22)10^2 + 31 \cdot 22 = \\ &= (748 - 682)10^2 + 682 = 6600 + 682 = 7282. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad 34 \cdot 22 &= (3 \cdot 10 + 4)(2 \cdot 10 + 2) = \\ &= 6 \cdot 10^2 + (7 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2)10 + 4 \cdot 2 = 600 + 140 + 8 = 748. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 31 \cdot 22 &= (3 \cdot 10 + 1)(2 \cdot 10 + 2) = \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 10^2 + (4 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2)10 + 1 \cdot 2 = 600 + 80 + 2 = 682. \end{aligned}$$