

Метод «разделяй и властвуй» Умножение матриц

Н.А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

2021

Определение. Произведением двух квадратных матриц n -го порядка $A = (a_{i,j})$ и $B = (b_{i,j})$ называется матрица n -го порядка $C = (c_{i,j})$, где

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

Записывается так: $C = AB$.

Если входной параметр это n – порядок матриц, а сложность измеряет в количестве арифметических операций, то алгоритм основанный на определении, очевидно, имеет сложность $O(n^3)$.

Метод «разделяй и властвуй»: основной алгоритм

Для нахождения AB разобьем каждую матрицу n -го порядка на четыре подматрицы $(\frac{n}{2})$ -го порядка. В случае нечетного порядка добавим нулевую строку и нулевой столбец. Это не повлияет на асимптотическую оценку алгоритма.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Тогда получим

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Оценим сложность

$$L(n) \leq 8 \cdot L\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2).$$

Так как $a = 8$, $c = 2$, $\alpha = 2$, то $a > c^\alpha$ и по теореме о рекуррентном неравенстве получается

$$L(n) = O(n^{\log_2 8}) = O(n^3).$$

Метод «разделяй и властвуй»: алгоритм Штрассена

Произведение находится по формулам (V. Strassen, 1969)

$$AB = \begin{pmatrix} D_0 + D_1 - D_3 + D_5 & D_3 + D_4 \\ D_5 + D_6 & D_0 + D_2 + D_4 - D_6 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= (A_{1,1} + A_{2,2})(B_{1,1} + B_{2,2}), & D_3 &= (A_{1,1} + A_{1,2})B_{2,2}, \\ D_1 &= (A_{1,2} - A_{2,2})(B_{2,1} + B_{2,2}), & D_4 &= A_{1,1}(B_{1,2} - B_{2,2}), \\ D_2 &= (A_{2,1} - A_{1,1})(B_{1,1} + B_{1,2}), & D_5 &= A_{2,2}(B_{2,1} - B_{1,1}), \\ & & D_6 &= (A_{2,1} + A_{2,2})B_{1,1}. \end{aligned}$$

Оценим сложность.

$$L(n) \leq 7 \cdot L\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2).$$

Так как $a = 7$, $c = 2$, $\alpha = 2$, то $a > c^\alpha$ и по теореме о рекуррентном неравенстве получается

$$L(n) = O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2,81}).$$

Пример умножения матриц алгоритмом Штрассена

Вычислим произведение AB , где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B_{2,2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример умножения матриц алгоритмом Штрассена

$$\begin{aligned} D_0 &= (A_{1,1} + A_{2,2})(B_{1,1} + B_{2,2}) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= (A_{1,2} - A_{2,2})(B_{2,1} + B_{2,2}) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= (A_{2,1} - A_{1,1})(B_{1,1} + B_{1,2}) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Пример умножения матриц алгоритмом Штрассена

$$\begin{aligned} D_3 &= (A_{1,1} + A_{1,2})B_{2,2} = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4 &= A_{1,1}(B_{1,2} - B_{2,2}) = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_5 &= A_{2,2}(B_{2,1} - B_{1,1}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_6 &= (A_{2,1} + A_{2,2})B_{1,1} = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример умножения матриц алгоритмом Штрассена

$$AB = \begin{pmatrix} D_0 + D_1 - D_3 + D_5 & D_3 + D_4 \\ D_5 + D_6 & D_0 + D_2 + D_4 - D_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем сложность рекурсивного шага:

$$L(4) = 7 \cdot L(2) + (3 \cdot 8 + 4 \cdot 4) = 7 \cdot L(2) + 40.$$