

Булевы уравнения

Н.А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

2021

Булевы уравнения и их канонический вид

- Канонический вид булева уравнения с одним неизвестным

$$f(a_1, \dots, a_n, x) = 0$$

- Решением булева уравнения называется булева операция $g(a_1, \dots, a_n)$, такая что выполняется равенство:

$$f(a_1, \dots, a_n, g(a_1, \dots, a_n)) = 0$$

Этот факт записываем так: $x = g(a_1, \dots, a_n)$.

- Отметим, что булево уравнение может иметь одно решение или конечное множество решений или не иметь ни одного решения. Например:

$x \oplus a = 0$ имеет одно решение: $x = a$;

$ax = 0$ имеет два решения: $x_1 = 0$ и $x_2 = \bar{a}$;

$x \vee \bar{x} = 0$ не имеет решений.

Аналитический метод решения булевых уравнений

Теорема 1. Пусть $\tilde{a} = a_1, \dots, a_n$ и дано уравнение

$$f(\tilde{a}, x) = 0 \quad (1)$$

Тогда:

а) Уравнение (1) разрешимо для параметров $\tilde{a}$ тогда и только тогда, когда для них выполняется условие:

$$(m_x f)(\tilde{a}) = f_x^0 \cdot f_x^1 = 0 \quad (2)$$

б) Если уравнение (1) разрешимо для параметров $\tilde{a}$, то общее решение находится по формуле:

$$g(\tilde{a}) = \alpha(\tilde{a}) \cdot f_x^0 \vee \bar{\alpha}(\tilde{a}) \cdot \bar{f}_x^1 \quad (3)$$

где $\alpha(\tilde{a})$ произвольная булева операция.

Доказательство теоремы 1

а) Используя разложение Шеннона по аргументу x :

$f(\tilde{a}, x) = \bar{x}f_x^0(\tilde{a}) \vee xf_x^1(\tilde{a})$ проведем следующие выкладки:

$$\begin{aligned} f(\tilde{a}, g(\tilde{a})) = 0 &\iff \bar{g}(\tilde{a})f_x^0 \vee g(\tilde{a})f_x^1 = 0 \iff \\ &\iff \bar{g}(\tilde{a})f_x^0 = 0 \text{ и } g(\tilde{a})f_x^1 = 0 \iff \bar{g}(\tilde{a}) \leq \bar{f}_x^0 \text{ и } g(\tilde{a}) \leq \bar{f}_x^1 \iff \\ &\iff f_x^0 \leq g(\tilde{a}) \leq \bar{f}_x^1 \Rightarrow f_x^0 f_x^1 = 0 \iff (m_x f)(\tilde{a}) = 0 \end{aligned}$$

Обратно, если $(m_x f)(\tilde{a}) = f_x^0 f_x^1 = 0$, то уравнение (1) разрешимо, например, f_x^0 является его решением.

б) Сначала покажем, что при выполнении условия (2) $g(\tilde{a})$ равное $\alpha(\tilde{a})f_x^0(\tilde{a}) \vee \bar{\alpha}(\tilde{a})\bar{f}_x^1(\tilde{a})$ является решением уравнения (1) для любой булевой операция $\alpha(\tilde{a})$.

$$\begin{aligned} f(\tilde{a}, g(\tilde{a})) &= (\overline{\alpha f_x^0 \vee \bar{\alpha} \bar{f}_x^1}) f_x^0 \vee (\alpha f_x^0 \vee \bar{\alpha} \bar{f}_x^1) f_x^1 = \\ &= (\bar{\alpha} \vee \bar{f}_x^0)(\alpha \vee f_x^1) f_x^0 \vee \alpha f_x^0 f_x^1 \vee \bar{\alpha} \bar{f}_x^1 f_x^1 = \\ &= \bar{\alpha} f_x^0 f_x^1 \vee \alpha f_x^0 f_x^1 = f_x^0 f_x^1 = 0 \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1

Теперь для того чтобы формула (3) определяла общее решение уравнения (1) осталось показать, что любое решение $g(\tilde{a})$ можно получить по формуле (3) при некоторой булевой операции $\alpha(\tilde{a})$.

Другими словами нужно показать, что уравнение $g(\tilde{a}) = yf_x^0 \vee \bar{y}\bar{f}_x^1$ имеет решение по неизвестной y .

Это уравнение равносильно уравнению

$$h(\tilde{a}, y) = g(\tilde{a}) \oplus (yf_x^0 \vee \bar{y}\bar{f}_x^1) = 0$$

Из пункта а) теоремы для разрешимости этого уравнения достаточно показать $(m_y h)(\tilde{a}) = 0$. Действительно:

$$\begin{aligned}(m_y h)(\tilde{a}) &= h_y^0 h_y^1 = (g \oplus \bar{f}_x^1)(g \oplus f_x^0) = (g \oplus f_x^1 \oplus 1)(g \oplus f_x^0) = \\ &= f_x^0 f_x^1 \oplus f_x^0 \oplus g f_x^0 \oplus g f_x^1 = \bar{g} f_x^0 \oplus g f_x^1 = f(\tilde{a}, g(\tilde{a})) = 0\end{aligned}$$

Получили, что существует $y(\tilde{a})$ такое, что $g(\tilde{a})$ получается из (3) при подстановки $y(\tilde{a})$.

Пример решения уравнения аналитическим методом

Дано уравнение в котором булева операция задана формулой:

$$f(a, b, c, x) = xa \vee bc \vee \bar{x}\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \quad (4)$$

а) По условию разрешимости находим значения параметров, при которых есть решения:

$$(m_x f)(a, b, c) = f_x^0 \cdot f_x^1 = (bc \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c})(a \vee bc) = bc = 0 \quad (5)$$

Это условие разбивается на два 1) $b = 0$ или 2) $c = 0$

Пример решения уравнения аналитическим методом

б) По формуле (3) находим общее решение:

$$\begin{aligned} g(a, b, c) &= \alpha(a, b, c) \cdot f_x^0 \vee \bar{\alpha}(a, b, c) \cdot \bar{f}_x^1 = \\ &= \alpha(a, b, c)(bc \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c}) \vee \bar{\alpha}(a, b, c)(\overline{a \vee bc}). \end{aligned}$$

В силу условия разрешимости (5) выполним сокращения и получим общее решение:

$$g(a, b, c) = \alpha(a, b, c)\bar{a}\bar{b}\bar{c} \vee \bar{\alpha}(a, b, c)\bar{a} \quad (6)$$

где $\alpha(a, b, c)$ произвольная булева операция.

Пример решения уравнения аналитическим методом

в) Подставляя в общее решение (6) общий вид булевой операции $\alpha(a, b, c)$ получим множество всех решений уравнения (4). Пусть

$$\alpha(a, b, c) = \beta_1 \bar{a} \bar{b} \bar{c} \vee \beta_2 \bar{a} \bar{b} c \vee \beta_3 \bar{a} b \bar{c} \vee \beta_4 \bar{a} b c \vee \beta_5 a \bar{b} \bar{c} \vee \beta_6 a \bar{b} c \vee \beta_7 a b \bar{c} \vee \beta_8 a b c$$

Проще рассмотреть отдельно два условия разрешимости:

1) Если $b = 0$, то $\alpha(a, b, c) = \beta_1 \bar{a} \bar{c} \vee \beta_2 \bar{a} c \vee \beta_5 a \bar{c} \vee \beta_6 a c$.

Получаем:

$$g(a, b, c) = (\beta_1 \bar{a} \bar{c} \vee \beta_2 \bar{a} c \vee \beta_5 a \bar{c} \vee \beta_6 a c) \bar{a} \bar{c} \vee \overline{(\beta_1 \bar{a} \bar{c} \vee \beta_2 \bar{a} c \vee \beta_5 a \bar{c} \vee \beta_6 a c)} \bar{a} = \beta_1 \bar{a} \bar{c} \vee (\beta_1 \bar{a} \bar{c} \vee \beta_2 \bar{a} c \vee a).$$

Подставляя все возможные значения β_1 и β_2 получим решения:

при $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$ или $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ будет решение: $x_1 = \bar{a}$;

при $\beta_1 = 0, \beta_2 = 1$ или $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1$ будет решение: $x_2 = \bar{a} \bar{c}$.

Пример решения уравнения аналитическим методом

2) Если $c = 0$, то $\alpha(a, b, c) = \beta_1 \bar{a} \bar{b} \vee \beta_3 \bar{a} b \vee \beta_5 a \bar{b} \vee \beta_7 ab$.

Получаем:

$$g(a, b, c) = (\beta_1 \bar{a} \bar{b} \vee \beta_3 \bar{a} b \vee \beta_5 a \bar{b} \vee \beta_7 ab) \bar{a} \bar{b} \vee \\ \vee (\beta_1 \bar{a} \bar{b} \vee \beta_3 \bar{a} b \vee \beta_5 a \bar{b} \vee \beta_7 ab) \bar{a} = \beta_1 \bar{a} \bar{b} \vee (\beta_1 \bar{a} \bar{b} \vee \beta_3 \bar{a} b \vee a).$$

Подставляя все возможные значения β_1 и β_3 получим решения:

при $\beta_1 = 0, \beta_3 = 0$ или $\beta_1 = 1, \beta_3 = 0$ будет решение: $x_1 = \bar{a}$;

при $\beta_1 = 0, \beta_3 = 1$ или $\beta_1 = 1, \beta_3 = 1$ будет решение: $x_3 = \bar{a} \bar{b}$.

В итоге уравнение (4) имеет три решения:

$x_1 = \bar{a}$ при $b = 0$ или $c = 0$;

$x_2 = \bar{a} \bar{c}$ при $b = 0$;

$x_3 = \bar{a} \bar{b}$ при $c = 0$.

Численный метод решения булевых уравнений

Анализируя для уравнения $f(\tilde{a}, x) = 0$ условия разрешимости $(m_x f)(\tilde{a}) = f_x^0 \cdot f_x^1 = 0$ и формулу общего решения $g(\tilde{a}) = \alpha(\tilde{a}) \cdot f_x^0 \vee \bar{\alpha}(\tilde{a}) \cdot \bar{f}_x^1$ можно найти представление их в векторной форме (численный вид).

Пусть дано векторное задание

$f(a_1, \dots, a_n, x) = (\sigma_1, \tau_1, \dots, \sigma_m, \tau_m)$, где $m = 2^n$.

Находим векторы $(m_x f)(a_1, \dots, a_n) = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ и $g(a_1, \dots, a_n) = (\delta_1, \dots, \delta_m)$ по формулам:

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_i = \tau_i = 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (7)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_i = 1; \\ 1, & \text{если } \sigma_i = 1 \text{ и } \tau_i = 0; \\ t_i, & \text{если } \sigma_i = \tau_i = 0, \text{ где } t_i \in \{0, 1\}. \end{cases} \quad (8)$$

Пример решения уравнения численным методом

Пусть в уравнение (4) булева операция задана вектором:

$$f(a, b, c, x) = (1000001101010111). \quad (9)$$

а) По формуле (7) находим условия разрешимости в векторной форме:

$$(m_x f)(a, b, c) = (00010001) = bc = 0. \quad (10)$$

б) По формуле (8) находим вектор общего решения:

$$g(a, b, c) = (1t_2t_300000). \quad (11)$$

в) Подставляя в общее решение (11) вместо t_2 и t_3 либо 0, либо 1 получим множество всех решений уравнения (9):

$$g_1(a, b, c) = (10000000);$$

$$g_2(a, b, c) = (10100000);$$

$$g_3(a, b, c) = (11000000);$$

$$g_4(a, b, c) = (11100000).$$

Пример решения уравнения численным методом

Рассмотрим отдельно два случая условия разрешимости:

1) Если $b = 0$, то

$$(g_1)_b^0(a, c) = (1000);$$

$$(g_2)_b^0(a, c) = (1000);$$

$$(g_3)_b^0(a, c) = (1100);$$

$$(g_4)_b^0(a, c) = (1100).$$

2) Если $c = 0$, то

$$(g_1)_c^0(a, b) = (1000);$$

$$(g_2)_c^0(a, b) = (1100);$$

$$(g_3)_c^0(a, b) = (1000);$$

$$(g_4)_c^0(a, b) = (1100).$$

Пример решения уравнения численным методом

Всего получили три решения:

при $b = 0$ или $c = 0$:

$$x_1 = (g_3)_b^0(a, c) = (g_4)_b^0(a, b) = (g_2)_c^0(a, c) = (g_4)_c^0(a, b) = (1100)$$

при $b = 0$:

$$x_3 = (g_1)_b^0(a, c) = (g_2)_b^0(a, c) = (1000)$$

при $c = 0$:

$$x_2 = (g_1)_c^0(a, b) = (g_3)_c^0(a, b) = (1000).$$

Этот ответ можно записать в формульном виде:

$$x_1 = \bar{a} \text{ при } b = 0 \text{ или } c = 0;$$

$$x_2 = \bar{a}\bar{c} \text{ при } b = 0;$$

$$x_3 = \bar{a}\bar{b} \text{ при } c = 0.$$