Булевы уравнения со многими неизвестными

Н.А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

2021

Системы булевых уравнений со многими неизвестными

- Общий вид системы булевых уравнений:

$$\begin{cases} f_1(\tilde{a}, \tilde{x}) \leq g_1(\tilde{a}, \tilde{x}) \\ ..... \\ f_m(\tilde{a}, \tilde{x}) \leq g_m(\tilde{a}, \tilde{x}) \end{cases}$$

где $\tilde{a} = a_1, ..., a_n$ набор коэффициентов,
$\tilde{x} = x_1, ..., x_s$ набор неизвестных.

- Переход от неравенств к равенствам с нулем в правой части

$$f(\tilde{a}, \tilde{x}) \leq g(\tilde{a}, \tilde{x}) \Longleftrightarrow f(\tilde{a}, \tilde{x}) \cdot \bar{g}(\tilde{a}, \tilde{x}) = 0$$

- Переход от системы уравнений к одному уравнению

$$\begin{cases} f(\tilde{a}, \tilde{x}) = 0 \\ g(\tilde{a}, \tilde{x}) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow f(\tilde{a}, \tilde{x}) \ \vee g(\tilde{a}, \tilde{x}) = 0$$

Булевы уравнения и их канонический вид

- Канонический вид булева уравнения с многими неизвестными

$$f(\tilde{a}, \tilde{x}) = 0$$

- Решением (или частным решением) булева уравнения называется набор булевых операций $g_1(\tilde{a}), ..., g_s(\tilde{a})$, такой что выполняется равенство:

$$f(\tilde{a}, g_1(\tilde{a}), ..., g_s(\tilde{a})) = 0$$

Этот факт записываем так: $x_i = g_i(a_1, ..., a_n), i = 1, ..., s$. Общее решение — это решение, представленное формулами с параметрами, такое что любое частное решение получается из этой формулы при некоторых значениях параметров.

Аналитический метод решения булевых уравнений

Теорема 1. Дано уравнение $f(\tilde{a}, \tilde{x}) = 0$ (1)

а) Уравнение (1) разрешимо для коэффициентов $\tilde{a}$ тогда и только тогда, когда для них выполняется условие:

$$m_{\tilde{x}} f(\tilde{a}) = f_{\tilde{x}}^{\tilde{0}}(\tilde{a}) \cdot \ldots \cdot f_{\tilde{x}}^{\tilde{1}}(\tilde{a}) = 0 \qquad (2)$$

б) Если уравнение (1) разрешимо для коэффициентов $\tilde{a}$, то общее решение находится по рекуррентным формулам:

$$g_s(\tilde{a}) = \alpha_s(\tilde{a}) \cdot m_{x_1 \ldots x_{s-1}} f_{x_s}^0(\tilde{a}) \vee \bar{\alpha}_s(\tilde{a}) \cdot \overline{m_{x_1 \ldots x_{s-1}} f_{x_s}^1}(\tilde{a})$$

если $g_{k+1}(\tilde{a}), \ldots, g_s(\tilde{a})$ — найдены, то

$$g_k(\tilde{a}) = \alpha_k(\tilde{a}) \cdot m_{x_1 \ldots x_{k-1}} f_{x_k}^0(\tilde{a}, g_{k+1}(\tilde{a}), \ldots, g_s(\tilde{a})) \vee$$
$$\vee \bar{\alpha}_1(\tilde{a}) \cdot \overline{m_{x_1 \ldots x_{k-1}} f_{x_k}^1}(\tilde{a}, g_{k+1}(\tilde{a}), \ldots, g_s(\tilde{a})) \qquad (3)$$

где $\alpha_1(\tilde{a}), \ldots, \alpha_s(\tilde{a})$ произвольные булевы операции (параметры).

Пример решения уравнения аналитическим методом

Дано уравнение в котором булева операция задана формулой:

$$f(a,b,x,y) = xy \vee ab \vee \bar{x}\bar{y}\bar{a}\bar{b} = 0 \tag{4}$$

где a, b — коэффициенты, x, y — неизвестные.

а) Условие разрешимости. По условию (2) находим значения коэффициентов, при которых есть решения:

$$m_{xy} f(a,b) = f^{0,0}_{x,y} \cdot f^{0,1}_{x,y} \cdot f^{1,0}_{x,y} \cdot f^{1,1}_{x,y} = (ab \vee \bar{a}\bar{b})(ab)(ab)(1) = ab = 0 \tag{5}$$

Это условие разбивается на два 1) $a = 0$ или 2) $b = 0$.

Пример решения уравнения аналитическим методом

б) Общее решение. По формулам (3) находим общее решение, учитывая условие разрешимости $ab = 0$:

$$y = g_2(a,b) = \alpha_2(a,b) \cdot m_x f_y^0(a,b) \vee \bar{\alpha}_2(a,b) \cdot \overline{m_x f_y^1}(a,b) = \\ = \alpha_2(a,b)ab \vee \bar{\alpha}_2(a,b)\overline{ab} = \bar{\alpha}_2(a,b);$$

$$x = g_1(a,b) = \alpha_1(a,b) \cdot f_x^0(a,b,g_2(a,b)) \vee \bar{\alpha}_1(a,b) \cdot \overline{f_x^1}(a,b,g_2(a,b)) = \\ = \alpha_1(a,b)(ab \vee \alpha_2(a,b)\bar{a}\bar{b}) \vee \bar{\alpha}_1(a,b)\overline{(\bar{\alpha}_2(a,b) \vee ab)} = \\ = \alpha_1(a,b)\alpha_2(a,b)\bar{a}\bar{b} \vee \bar{\alpha}_1(a,b)\alpha_2(a,b) = \\ = \alpha_2(a,b)(\bar{a}\bar{b} \vee \bar{\alpha}_1(a,b)) \quad (6)$$

где $\alpha_1(a,b), \alpha_2(a,b)$ произвольные булевы операции.

Пример решения уравнения аналитическим методом

в) Множество всех решений. Подставляя в общее решение (6) общий вид булевых операций $\alpha_1(a, b)$ и $\alpha_2(a, b)$ получим множество всех решений уравнения (4). Пусть

$$\alpha_1(a, b) = \sigma_1 \bar{a}\bar{b} \vee \sigma_2 \bar{a} b \vee \sigma_3 a\bar{b} \vee \sigma_4 ab;$$

$$\alpha_2(a, b) = \tau_1 \bar{a}\bar{b} \vee \tau_2 \bar{a} b \vee \tau_3 a\bar{b} \vee \tau_4 ab.$$

Проще рассмотреть отдельно два условия разрешимости 1) $a = 0$ и 2) $b = 0$.

Пример решения уравнения аналитическим методом

1) Если $a = 0$, то

$$\alpha_1(a, b) = \sigma_1 \bar{b} \vee \sigma_2 b$$

$$\alpha_2(a, b) = \tau_1 \bar{b} \vee \tau_2 b.$$

Получаем:

$$\begin{cases} x = g_1(a, b) = \tau_1 \bar{b} \vee (\tau_1 \bar{b} \vee \tau_2 b)\overline{(\sigma_1 \bar{b} \vee \sigma_2 b)} \\ y = g_2(a, b) = \overline{(\tau_1 \bar{b} \vee \tau_2 b)} \end{cases}$$

Подставляя все возможные значения $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ получим шесть частных решений:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \bar{b} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \bar{b} \end{cases} \quad \begin{cases} x = b \\ y = \bar{b} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \bar{b} \\ y = b \end{cases}$$

Пример решения уравнения аналитическим методом

2) Если $b = 0$, то можно провести вычисления как в пункте 1), но если заметить, что уравнение (4) симметрично относительно a и b, то можно сразу выписать все решения.
В итоге уравнение (4) имеет следующее множество решений:
при $a = 0$ или $b = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

при $a = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \bar{b} \end{cases} \quad \begin{cases} x = b \\ y = \bar{b} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \bar{b} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \bar{b} \\ y = b \end{cases} \tag{7}$$

при $b = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \bar{a} \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \\ y = \bar{a} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \bar{a} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \bar{a} \\ y = a \end{cases}$$

Численный метод решения булевых уравнений

Пусть уравнение задано в векторной форме

$$f(\tilde{a}, \tilde{x}) = (\sigma_{11}, .., \sigma_{1k}, \sigma_{21}, .., \sigma_{2k}, ..., \sigma_{m1}, .., \sigma_{mk}) = 0 \qquad (8)$$

где $k = 2^s$, $m = 2^n$.

а) Условие разрешимости. Анализируя для уравнения $f(\tilde{a}, \tilde{x}) = 0$ условия разрешимости (2) можно найти его представление в векторной форме:

$$m_{\tilde{x}} f(\tilde{a}) = (\gamma_1, ..., \gamma_m) = 0$$

$$\text{где } \gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_{i1} = \sigma_{i2} = ... = \sigma_{ik} = 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (9)$$

Численный метод решения булевых уравнений

б) Множество всех решений уравнения (8) в векторной форме:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(\tilde{a}) = (\delta_{11}, ..., \delta_{1m}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_s = g_s(\tilde{a}) = (\delta_{s1}, ..., \delta_{sm}) \end{cases} \tag{10}$$

где $\{(\delta_{1i}, ..., \delta_{si})\}$ — все двоичные наборы удовлетворяющие равенству

$$f(i_1, ..., i_n, \delta_{1i}, ..., \delta_{si}) = 0$$

где $i = (i_1, ..., i_n)_2 + 1$, то есть на 1 больше чем число в двоичном представлении равное набору $(\mathrm{i}_1, ..., i_n)$.

Пример решения уравнения численным методом

Пусть в уравнение (4) булева операция задана вектором:

$$f(a, b, x, y) = (1001000100011111) = 0. \qquad (11)$$

а) По формуле (9) находим условия разрешимости в векторной форме:

$$m_{xy} f(a, b) = (0001) = ab = 0. \qquad (12)$$

Получается два условия разрешимости 1) $a = 0$ или 2) $b = 0$.

б) При нахождении множества всех решений для упрощения вычислений будем рассматривать каждое из условий отдельно.

Пример решения уравнения численным методом

1) Если $a = 0$, то $f(0, b, x, y) = (10010001) = 0$.
Множество решений будем находить по формулам (10).

$$\{(\delta_{11}, \delta_{21})\} = \{(01), (10)\}$$

$$\{(\delta_{12}, \delta_{22})\} = \{(00), (01), (10)\}$$

Выбирая всевозможные комбинации из первого и второго множеств получил шесть решений:

$$\begin{cases} x = (00) \\ y = (10) \end{cases} \begin{cases} x = (00) \\ y = (11) \end{cases} \begin{cases} x = (01) \\ y = (10) \end{cases} \begin{cases} x = (10) \\ y = (00) \end{cases} \begin{cases} x = (10) \\ y = (01) \end{cases} \begin{cases} x = (11) \\ y = (00) \end{cases}$$

Этот ответ можно записать в формульном виде,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \bar{b} \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \begin{cases} x = b \\ y = \bar{b} \end{cases} \begin{cases} x = \bar{b} \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \bar{b} \\ y = b \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Пример решения уравнения численным методом

2) Если $b = 0$, то $f(a, 0, x, y) = (10010001) = 0$. В силу симметрии уравнения относительно a и b можно сразу выписать все решения, аналогично пункту 1).

$$\begin{cases} x = (00) \\ y = (10) \end{cases} \begin{cases} x = (00) \\ y = (11) \end{cases} \begin{cases} x = (01) \\ y = (10) \end{cases} \begin{cases} x = (10) \\ y = (00) \end{cases} \begin{cases} x = (10) \\ y = (01) \end{cases} \begin{cases} x = (11) \\ y = (00) \end{cases}$$

Пример решения уравнения численным методом

В итоге уравнение (11) имеет следующее множество решений:
при $a = 0$ или $b = 0$ получаем:

$$\begin{cases} x = (0) \\ y = (1) \end{cases} \quad \begin{cases} x = (1) \\ y = (0) \end{cases}$$

при $a = 0$ получаем $x = g_1(b), y = g_2(b)$:

$$\begin{cases} x = (0) \\ y = (10) \end{cases} \quad \begin{cases} x = (01) \\ y = (10) \end{cases} \quad \begin{cases} x = (10) \\ y = (0) \end{cases} \quad \begin{cases} x = (10) \\ y = (01) \end{cases}$$

при $b = 0$ получаем $x = g_1(a), y = g_2(a)$:

$$\begin{cases} x = (0) \\ y = (10) \end{cases} \quad \begin{cases} x = (01) \\ y = (10) \end{cases} \quad \begin{cases} x = (10) \\ y = (0) \end{cases} \quad \begin{cases} x = (10) \\ y = (01) \end{cases}$$

Если этот ответ записать в формульном виде, то он совпадет с (7) для уравнения (4), т.к. уравнения (4) и (11) это одно и то же уравнение заданное в разном виде: формульном и векторном. .