МИНОБРНАУКИ РОССИИ

–––––––––––––––––––––––––––––––––

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

–––––––––––––––––––––––––––––––––––––––

СТАТИСТИКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Методические рекомендации к подготовке проверки знаний по дисциплине

СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ

**Обозначения и сокращения**

С.В. – «случайная величина», с.п. − “случайный процесс”, м. о. − “математическое ожидание”, σ − среднеквадратическое отклонение, − дисперсия.

*N*(*m*;*σ*) нормальный закон распределения с м.о. *m* и дисперсией .

*R*(*a*; *b*) равномерный закон распределения на отрезке [*a*; *b*]. М.о.  дисперсия .

*E*(*λ*) экспоненциальный закон с параметром *λ*.  .

*В*(*n*, *p*) биномиальный закон с параметрами *n*, *p*.  .

*Р*(*λ*) закон распределения Пуассона с параметром *λ*. .

**−**центрированная случайная величина или центрированный случайный процесс.

1. **Случайный процесс.**

Функция *X = X* (*t*, *ω*), где *t* ∈ *T*,  (*t* − время, или *t* ≥ 0, Ω − пространство элементарных событий) называется *случайным процессом*.В дальнейшем с. п. *X* (*t*, *ω*) будем обозначать сокращенно *X* (*t*) или *X*.

При фиксированном значении  *X* (*t*0, *ω*) является случайной величиной, которая называется *сечением* случайного процесса в момент времени *t*0 .

При фиксированном значении  *X* (*t*, *ω*0) является неслучайной (обычной) функцией от времени *t*, которая называется *реализацией* случайного процесса.

1. **Математическое ожидание с.п.**

При фиксированном значении *t* сечение *X*(*t*) является случайной величиной. Пусть для любого *t* ∈ *T* существует м.о. *М*[*X* (*t*)].

*Математическим ожиданием* *с.п.* *X* (*t*) называется неслучайная функция от времени *t mX* (*t*) = *М*[*X* (*t*)].

1. **Свойства математического ожидания с. п.**

Пусть *X*(*t*), *Y*(*t*) − случайные процессы, *φ*(*t*) − неслучайная функция, *С* − константа.

1. *mφ* (*t*) = *φ*(*t*).
2. *mX*+*Y* (*t*) = *mX* (*t*) + *mY* (*t*).
3. *mСХ* (*t*) = *С∙mX* (*t*).
4. *mX*∙*Y* (*t*) = *mX* (*t*)∙*mY* (*t*), если сечения *X* (*t*), *Y* (*t*) некоррелированы при каждом .
5. *mφX* (*t*) = *φ*(*t*)∙*mX* (*t*).
6. **Дисперсия с.п.**

Пусть при каждом фиксированном *t* для сечения *X*(*t*) определена дисперсия *D*[*X*(*t*)]. *Дисперсией с.п. X*(*t*) называется неслучайная функция от времени *t DX* (*t*)=*D*[*X* (*t*)].

Среднеквадратическим отклонением *с.п. X*(*t*) называется 

1. **Свойства дисперсии с.п.**

Пусть *X*(*t*), *Y*(*t*) − случайные процессы, *φ*(*t*) − неслучайная функция, *С* − константа.

1. *DX* (*t*) ≥ 0.
2. *Dφ* (*t*) = 0.
3. *DφX* (*t*) = (*φ*(*t*))2*DX* (*t*).
4. *Dφ+X* (*t*) = *DX* (*t*).
5. *DX*+*Y* (*t*) = *DX* (*t*) + *DY* (*t*), если сечения *X*(*t*), *Y*(*t*) некоррелированы при каждом .
6. **Корреляционная функция с.п.**

Пусть **−**центрированный с.п.

*Корреляционной функцией* с.п*.* *X*(*t*) называется неслучайная функция от двух аргументов *t*1, *t*2

 .

*Нормированной корреляционной функцией* с.п*. X*(*t*) называется неслучайная функция

.

1. **Свойства корреляционной функции с.п.**

Пусть *X*(*t*) − случайный процесс, *U* − случайная величина, *φ*(*t*) − неслучайная функция.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. .
6. 
7. .
8. , .
9. **Взаимная корреляционная функция с.п.**

Пусть *X*(*t*), *Y*(*t*) − случайные процессы. *Взаимной корреляционной функцией* с. п*. X*(*t*), *Y*(*t*) называется неслучайная функция от двух аргументов *t*1, *t*2

.

Два с.п. *X*(*t*), *Y*(*t*) называются *некоррелированными*, если

 .

*Нормированной взаимной корреляционной функцией* с.п*. X*(*t*), *Y*(*t*) называется неслучайная функция

.

1. **Свойства взаимной корреляционной функции.**

Пусть *X*(*t*), *Y*(*t*) − случайные процессы, *φ*(*t*), *ψ*(*t*) − неслучайные функции.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. .
6. .

**Теорема.** Если , то

.

**Следствие.** Если  и с. п.  попарно некоррелированы, то

.

Для двух случайных процессов  и  теорема и следствие выглядят следующим образом.

. (1)

Если с.п. и  некоррелированы, то

. (2)

1. **Характеристики производной случайного процесса.**

Пусть *X*(*t*) − случайный процесс, − его производная. Тогда верны следующие свойства.

1. .
2. .
3. ,  .
4. **Характеристики интеграла от случайного процесса.**

Пусть *X*(*t*) − случайный процесс,

.

Тогда выполняются следующие свойства.

1. .
2. .
3. , .
4. **Стационарные случайные процессы.**

С.п. *X*(*t*) называется *стационарным* (в широком смысле), если его м. о. постоянно, а корреляционная функция зависит только от .

Таким образом,

= const, (3)

, где . (4)

Два стационарныхс.п. *X*(*t*) и *Y*(*t*) называются *стационарно связанными*, если взаимно корреляционная функция , где .

1. **Основные свойства и формулы для стационарных с.п.**

Пусть *X*(*t*) − стационарныйслучайный процесс.

1. = const.
2. .
3. − четность функции.
4. , где − нормированная корреляционная функция с.п. *X*(*t*).

**Характеристики производной стационарного случайного процесса.**

Пусть *X*(*t*) − дифференцируемый стационарный с.п. Тогда

1. стационарный случайный процесс.
2. .
3. .
4. ,  –  и  стационарно связаны

**Характеристики интеграла от стационарного случайного процесса.** Пусть *X*(*t*) − интегрируемый стационарный с.п. и . Тогда

1. .
2. .
3. , .

Рассмотрим функцию. Тогда по свойству 9) имеем

. (5)

Заметим, что функция *I*(*t*) – четная, а для функции  выполняется соотношение . Это можно доказать, сделав замену переменной *τ =* –*s* в обоих интегралах *I*(–*t*) и .

1. **Эргодическое свойство стационарного случайного процесса.**

Определение. Стационарный с.п. *X*(*t*) называется *эргодическим относительно математического ожидания* *mX* , если для любой его реализации 

. (6)

Стационарный с.п *X*(*t*) называется *эргодическим относительно корреляционной функции kX*(τ), если для любой его реализации 

. (7)

1. **Спектральное разложение стационарного случайного процесса.**

Пусть *X*(*t*) − стационарный с.п., *kX*(τ) − его корреляционная функция, интегрируемая абсолютно на (−∞, +∞).

Преобразование Фурье

 (8)

называется *спектральной плотностью* с.п. *X*(*t*).

Корреляционная функция *kX*(τ) выражается через спектральную плотность при помощи обратного преобразования Фурье

 . (9)

Соотношения (8) и (9) называется формулами Винера–Хинчина.

1. **Свойства спектральной плотности стационарного с. п.**
2. − четность спектральной плотности.
3. .
4. .

Из-за четности функций *kX*(τ) и *SX*(*ω*) формулы (8) и (9) можно представить в виде

 (10)

 (11)

1. **Преобразование стационарного с.п. стационарной линейной динамической системой.**

Стационарная линейная динамическая система описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

. (12)

Введем обозначение . Тогда уравнение (12) принимает вид

.

Обозначим

, .

Функция  называется *передаточной функцией* стационарной линейной динамической системы (12). Функция  называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой, а  называется амплитудно-частотной характеристикой стационарной линейной динамической системы.

Если на вход устойчивой стационарной линейной динамической системы (12) подается стационарный с.п. *X*(*t*), то в установившемся режиме на выходе будет стационарный с.п. *Y*(*t*). При этом верны следующие формулы.

1. .
2. .
3. .
4. .

**Сведения из теории вычетов.**

1. **Вычисление вычетов для полюсов.**

Пусть *z*0 − простой полюс функции , функции  аналитичны в точке *z*0  и . Тогда

. (1)

Пусть *z*0 − полюс второго порядка функции . Тогда

. (2)

1. **Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов.**

Пусть *P*(*z*), *Q*(*z*) − многочлены от *z* степени *n*,  *m* соответственно, причем *m > n* + 1. Кроме того, пусть дробь *P*(*z*)/*Q*(*z*) не имеет особых точек на оси *Ох*, а − все ее полюса с положительными мнимыми частями. Тогда

 , (3)

. (4)

Замечание. При *m > n* + 1 формула (3) является частным случаем формулы (4) при *a* = 0. Однако при *a* > 0 формула (4) верна и при *m > n*.